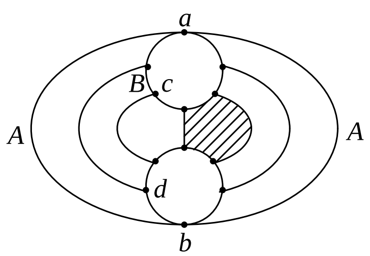
# 略解とヒント

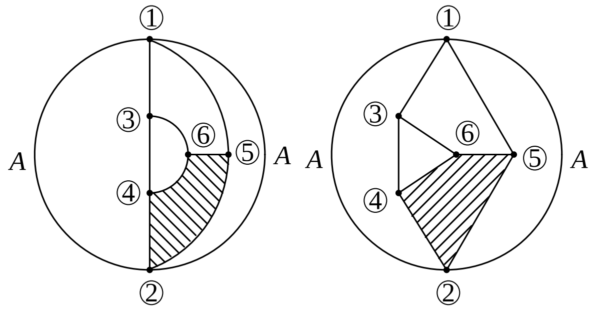
解答の仕方は考え方によっていろいろある場合があるので, 以下に示すものにこだわらず, 自分で考えたり, 友人と議論したり, 文献を調べたりするのが良い.

**問 1.1〜問 1.2**　下の図, またはそれを左右対称にした図

問 1.1

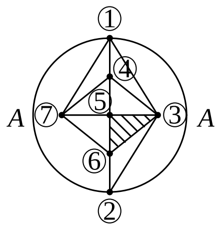



問 1.2 (1)



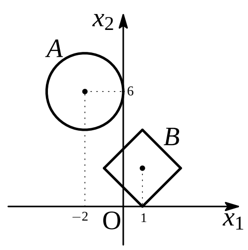

など

問 1.2 (2)




第　2　章

**問 2.1**




**問 2.2**　任意の $U_\varepsilon(a)$ に対して, $\delta = \varepsilon$ とすれば $V_\delta(a) \subset U_\varepsilon(a)$ となる. 逆に, 任意の $V_\delta(a)$ に対して, $\varepsilon = \dfrac{\delta}{2}$ とすれば $U_\varepsilon(a) \subset V_\delta(a)$ となる.

**問 2.3**　(1) 任意の $x \in (a,b)$ に対して $\varepsilon = \min\{\, |a-x|, |b-x| \,\}$ とすると, $x \in U_\varepsilon(x) \subset (a,b)$ となるから $(a,b)$ は $\mathbb{R}^1$ の開集合である.
(2) 補集合 $B = \mathbb{R}^2 \setminus A$ を考える. 任意の $x \in B$ に対して $0 < \varepsilon < d(a,x)$ となる $\varepsilon$ をとれば, $x \in U_\varepsilon(x) \subset B$ だから $B$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である. したがって, $A$ は閉集合である. また, $a$ は $A$ の内点でも外点でもないから境界点である.
(3) 任意の点 $a \in B$ に対して, $0 < \varepsilon < (a_1)^2 + (a_2)^2 - 1$ なる $\varepsilon$ をとれば, 近傍

$$U_\varepsilon(a) = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid d(a,x) < \varepsilon \,\}$$

は $B$ に含まれるから, $B$ は開集合である. 次に, $D = \{\, x(x_1,x_2) \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1 \,\}$ とおくとき, $D$ に属する点はすべて $B$ の外点であることがわかる. 任意の点 $a \in C$ に対して, どのように $\varepsilon$ 近傍 $U_\varepsilon(a)$ をとっても

$$U_\varepsilon(a) \cap B \neq \emptyset, \qquad U_\varepsilon(a) \cap D \neq \emptyset$$

であり, したがって $C$ は $B$ の（同時に $D$ の）境界点から成る集合である.

**問 2.4** (1) 任意の $x \in A \cup B$ に対して $x \in A$ または $x \in B$ であり

$$\exists \varepsilon_1 > 0 \left\{ x \in U_{\varepsilon_1}(x) \subset A \right\} \quad \text{または} \quad \exists \varepsilon_2 > 0 \left\{ x \in U_{\varepsilon_2}(x) \subset B \right\}$$

だから $U_\varepsilon(x) = U_{\varepsilon_1}(x)$ とおけば $x \in U_\varepsilon(x) \subset A \cup B$ となるので, $A \cup B$ は開集合である. 次に, 任意の $x \in A \cap B$ に対して $x \in A$ かつ $x \in B$ であり

$$\exists \varepsilon_1 > 0 \left\{ x \in U_{\varepsilon_1}(x) \subset A \right\} \quad \text{かつ} \quad \exists \varepsilon_2 > 0 \left\{ x \in U_{\varepsilon_2}(x) \subset B \right\}$$

である. そこで $0 < \varepsilon < \min\left\{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \right\}$ となる $\varepsilon$ をとれば

$$x \in U_\varepsilon(x) \subset U_{\varepsilon_1} \subset A \quad \text{かつ} \quad x \in U_\varepsilon(x) \subset U_{\varepsilon_2} \subset B$$

だから $x \in U_\varepsilon(x) \subset A \cap B$ となり, $A \cap B$ は開集合である.
(2) $A, B \in \mathscr{C}$ ならば $A^c = X \setminus A$, $B^c = X \setminus B \in \mathscr{O}$ であり

- $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \in \mathscr{O}$ より $A \cup B \in \mathscr{C}$
- $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \in \mathscr{O}$ より $A \cap B \in \mathscr{C}$

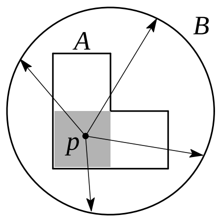
**問 2.6** $\emptyset = W \cap \emptyset$, $W = W \cap X$ と表せるから公理 (1) を満たす. (2) が満たされるのは明らかであろう. 任意の $A \cap W, B \cap W$（$A, B \in \mathscr{A}$）に対して

$$(A \cap W) \cap (B \cap W) = (A \cap B) \cap W, \quad (A \cap W) \cup (B \cap W) = (A \cup B) \cap W$$

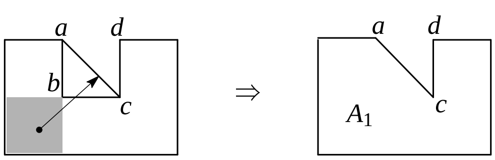
だから公理 (3)(4) も満たされる.

**問 2.8** $X = (X, \mathscr{A}_X), Y = (Y, \mathscr{A}_Y), Z = (Z, \mathscr{A}_Z)$ とする. 任意の $C \in \mathscr{A}_Z$ に対して $\psi^{-1}(C) \in \mathscr{A}_Y$ であり, $\varphi^{-1}(\psi^{-1}(C)) \in \mathscr{A}_X$ である. したがって $\Phi^{-1}(C) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(C))$ となるので $\Phi$ は連続である.

**問 2.9** (1) 右図のように、$A$ の内部の影をつけた部分に点 $p$ をとり, ステレオ射影を考えると, $A$ から円周 $B$ への連続な全単射が得られる.
(2) まず $A$ から凸多角形 $A_2$ への連続な全単射を順次構成し, そのあと $A_2$ から円周 $B$ へのステレオ射影を考える.

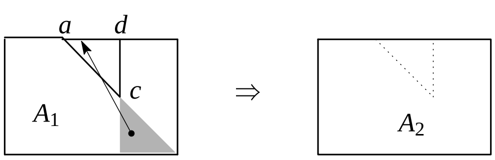



具体的には以下のように $A$ のへこんでいる部分（頂点 $a, b, c, d$ を結ぶ辺）を埋めてゆく. その第 1 段階は, 下図左のように影をつけた内部に基点をとり, ステレオ射影を考える.




上の図で $A$ から $A_1$ への写像 $\varphi_1$ は「辺 $ab$ と $bc$ から辺 $ac$ への部分はステレオ射影とし, それ以外の辺に対しては恒等写像」と定める.

第 2 段階は, 下図左のように影をつけた内部に基点をとり, ステレオ射影を考える. $A_1$ から $A_2$ への写像 $\varphi_2$ は「辺 $ac$ と $cd$ から辺 $ad$ への部分はステレオ射影とし, それ以外の辺に対しては恒等写像」と定める.



最後に, $A_2$ の内部に基点をとり, $A_2$ から円周 $B$ へのステレオ射影 $\varphi_3$ を考え, $\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ と定めれば, $A$ から $B$ への連続な全単射 $\varphi$ が得られる.

**問 2.10** $x \in I_1 \Rightarrow \varphi(x) = x$ また $x \in I_2 \Rightarrow t_1 = \dfrac{2}{2-x_2}$

**問 2.13** 次の２つを示す. (1) $\psi(y) \in B_r^i$ (2) $\psi(\varphi(x)) = x$

(1) $d(\psi(y),0) = d\left(\dfrac{ry}{r+d(y,0)},0\right) = \dfrac{r\,d(y,0)}{r+d(y,0)} < \dfrac{r^2+r\,d(y,0)}{r+d(y,0)} = r$

(2) $\psi(\varphi(x)) = \psi\left(\dfrac{rx}{r-d(x,0)}\right) = \dfrac{r\,\psi(x)}{r-d(\psi(x),0)} = \left\{r\cdot\dfrac{rx}{r+d(x,0)}\right\} \div \left\{r-\dfrac{r\,d(x,0)}{r+d(x,0)}\right\} = x$

## 第 3 章

**問 3.1** アニュラスを

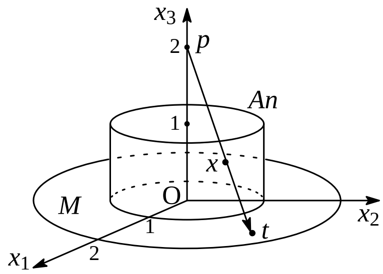
$M = \left\{ (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq (t_1)^2+(t_2)^2 \leq 2 \right\}$

とおく. 定点 $p(0,0,2) \in \mathbb{R}^3$ からのステレオ射影 $\varphi : An \to M$ を考える. 相似な三角形の辺の比 $pt : px = 2 : (2-x_3)$ より

$$\frac{pt}{px} = \frac{2}{2-x_3} \qquad (0 \leq x_3 \leq 1)$$

となり, これをベクトルの関係式 $\overrightarrow{pt} = \dfrac{pt}{px}\,\overrightarrow{px}$ にあてはめると

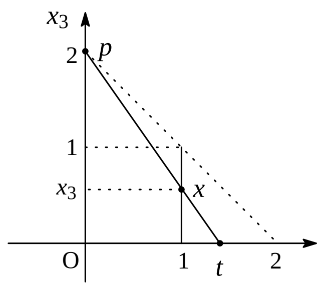
$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{2}{2-x_3}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3-2 \end{pmatrix} \text{ だから } \quad t_1 = \frac{2x_1}{2-x_3}, \quad t_2 = \frac{2x_2}{2-x_3}$$




別の辺の比 $pt : px = \mathrm{O}t : 1$ より $\dfrac{px}{pt} = \dfrac{1}{\mathrm{O}t} = \dfrac{1}{\sqrt{t_1{}^2+t_2{}^2}}$ となる. ここで簡単のために $r = \sqrt{t_1{}^2+t_2{}^2}$ とおき, ベクトルの関係式 $\overrightarrow{px} = \dfrac{px}{pt}\,\overrightarrow{pt}$ にあてはめると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ より } \quad x_1 = \frac{t_1}{r}, \quad x_2 = \frac{t_2}{r}$$

また $x_3 - 2 = \dfrac{-2}{r}$ より $\quad x_3 = \dfrac{2(r-1)}{r}$ となる.




**問 3.3** (1) $\chi(4T^2) = 2-2\times 4 = 2-8 = -6$ (2) $\chi(5P^2) = 2-5 = -3$

(3) $\chi(3T^2\#2S^2) = \chi(3T^2) = 2-2\times 3 = 2-6 = -4$

(4) $\chi(2T^2\#6P^2) = \chi(2T^2)+\chi(6P^2)-2 = 2-2\times 2+2-6-2 = -8$

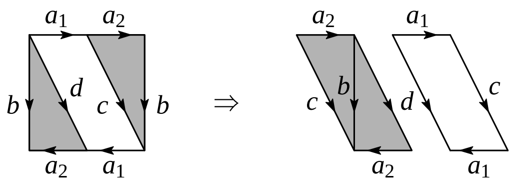
## 第 4 章

**問 4.1**

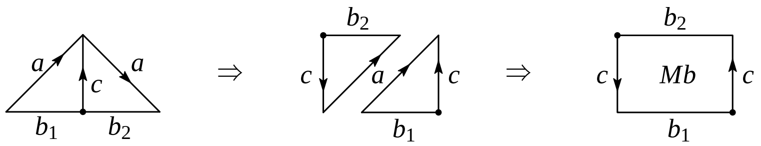
| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
|---|---|---|---|---|---|
| 閉曲面 | × | ○ | × | ○ | ○ |
| 向き付け可能 | ○ | × | × | × | ○ |

**問 4.2** $\chi(Kb) = \chi(P^2\#P^2) = \chi(P^2)+\chi(P^2)-2 = 0$

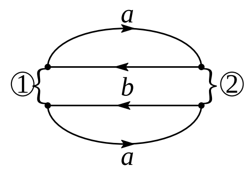
**問 4.3** (1) 塗りつぶした三角形の部分の辺 $b$ を貼り合せると２つのメビウスの帯になる.



(2) 下図のように, 辺 $c$ で切り離し, 辺 $a$ を貼り合せる.

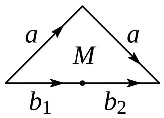



**問 4.4** (1) 閉円盤 $D^2$ を 2 辺形で表し, その辺を $a, b$ とする. 右図のように, 辺 $b$ を貼り合せると, 例 4.4 の球面 $S^2$ の 2 辺形モデルとなる.




(2) $M$ の辺 $b$ を 2 つに分けて $b = b_1 b_2$ とする. 図 1 または図 2
また $D^2$ を辺 $c$ により 2 分割する. 図 3
図 2 と図 3 の辺 $b_1 b_2$ を貼り合せると図 4 になる.
図 4 の辺 $c$ を貼り合せると, 例 4.4 の射影平面 $P^2$ の 2 辺形モデルとなる.

図 1




⇒

図 2

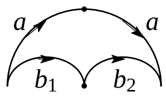



図 3

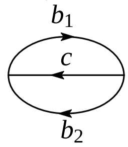
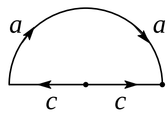



図 4




**問 4.5** 問題の曲面をどれも $M$ とする.
(1) $M \approx abbacc \approx (abba)(cc) \approx (aabb)cc \approx 3P^2$
(2) $M \approx aba^{-1}cb^{-1}c^{-1} \approx (c^{-1}a)b(c^{-1}a)^{-1}b^{-1} \approx T^2$
(3) $M = a(bc)a^{-1}(bc)^{-1} \approx T^2$
(4) $M \approx abbc^{-1}a^{-1}c \approx (bb)(c^{-1}a^{-1}ca) \approx P^2\#T^2 \approx 3P^2$
(5) $M \approx abbc^{-1}ac^{-1} \approx (c^{-1}a)(c^{-1}a)bb \approx 2P^2$

**問 4.6** 問題の曲面をどれも $M$ とする.
(1) $M \approx abcca^{-1}b^{-1} \approx (cc)(a^{-1}b^{-1}ab) \approx P^2\#T^2 \approx 3P^2$
(2) $M \approx abbca^{-1}c \approx (bb)(ca^{-1}ca) \approx P^2\#Kb \approx 3P^2$
(3) $M \approx abbdx^{-1}a^{-1}dyxy \approx (bb)(dx^{-1}a^{-1}dyxya) \approx (bb)(dd)(axyxya)$ $\quad xy = c$ とおく
$\approx (bb)(dd)(acca) \approx (bb)(dd)(cc)(aa) \approx 4P^2$
(4) $M \approx bcb^{-1}dc^{-1}d^{-1} = cb^{-1}dc^{-1}d^{-1}b \approx cb^{-1}d^{-1}dc^{-1}b \approx cb^{-1}c^{-1}b \approx T^2$
(5) $M \approx aba^{-1}cb^{-1}dc^{-1}d^{-1} = d^{-1}aba^{-1}cb^{-1}dc^{-1} \approx d^{-1}b^{-1}aba^{-1}cdc^{-1} \approx (b^{-1}aba^{-1})(cdc^{-1}d^{-1}) \approx 2T^2$

**問 4.7** まず $m \neq 0, n \neq 0$ として考える. いろいろな導き方がある. 次に $m = 0$ のとき $mT^2 = S^2$, また $n = 0$ のとき $nP^2 = S^2$ とすると, 関係式は $m \geq 0, n \geq 0$ で成立する.

**問 4.9** (1) 4 (2) 10 (3) 14