

第4章 閉曲面の分類

曲面を平面上の多辺形モデルに置き換えるアイデアをさらにもう一歩進めて、周辺のラベルの文字列（語または単語という）によってその曲面を表現するものとする。それぞれの曲面に対してその語の標準形を定め、語の演算の規則を定めて、閉曲面の分類という問題を解決する。また、曲面の向きづけ可能性という新たな性質を導入する。

§ 4.1 多辺形モデルの語

いろいろな曲面について多辺形モデルを考えると、ある頂点を起点として時計回りに多辺形の周辺をたどり、辺のラベルを順に並べたものを考え、それを多辺形モデルの語という。このとき同一視される辺には矢印で向きが付いているので、矢印が時計回りとは逆の向きときはラベルに -1 乗をつけて表すものとする。

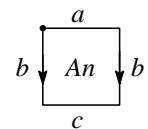
同じラベルは同一視する（貼り合せる）ことで境界ではなくなるが、そうでないものは境界である。具体的な例で多辺形モデルの語を説明しよう。

例 4.1 アニュラス $An = abcb^{-1}$ （標準形）

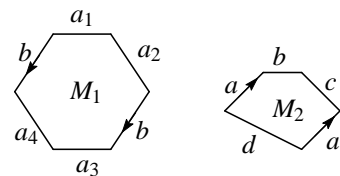
例 3.9 をもとに、右図 (1) のように 4 辺形にラベルを付け、左上の頂点を基点として時計回りに辺をたどる。起点をどこにとるかでラベルの列すなわち語は何通りかで表されるが、どれも同じ曲面であるので等号で示す。

$$abcb^{-1} = bcb^{-1}a = cb^{-1}ab = b^{-1}abc$$

辺 a, c は同一視しない（貼り合せない）ので境界となる。

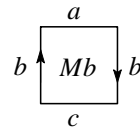


例 4.2 右図の 6 辺形モデルで表される曲面 $M_1 = a_1a_2ba_3a_4b^{-1}$ について $M_1 \approx An$ である。また 5 辺形モデルで表される曲面 $M_2 = abca^{-1}d$ についても $M_2 \approx An$ である。どちらも同一視する辺を貼り合せると境界をもつ円筒形の曲面になり、辺のラベルを付け替えると例 4.1 の標準形になるからである。



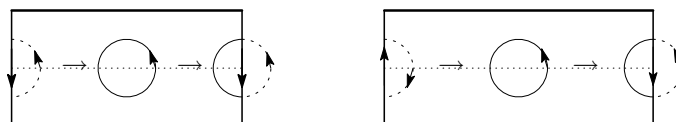
例 4.3 メビウスの帯 $Mb = abcb$ （標準形）

例 3.9 で考えたように、同一視する辺 b の向きを右図のようにしたものである。辺 a, c は同一視しない（貼り合せない）ので境界となる。



アニュラス An とメビウスの帯 Mb についてオイラー標数を求めると、どちらも 0 であるが、曲面の形はまったく違うので、オイラー標数とは別の指標が必要であることがわかる。この 2 つの曲面の違いは辺 b の向きにあり、それを特徴づけるものは何か考えてみよう。

下図のように曲面上で小さい円を回転させながら移動させたとする、アニュラス An の場合、下図左のように、回転する小円が元の位置に戻ってきたとき、回転の向きは変わらない。それに対して、メビウスの帯 Mb の場合、下図右のように、回転する小円が元の位置に戻ってきたとき、回転の向きは反対になる。



【定義 4.1】 曲面上の道に沿って回転する小円が移動し、元の位置に戻るとする。どのような道をたどっても回転の向きが元と同じであるとき、その曲面は向きづけ可能 *orientable* であるという。それに反して、もし一つの道でもそれをたどって戻ると逆回転になるようなものがあるとき、その曲面は向きづけ不可能 *non-orientable* であるという。

☞ 曲面の向きづけ可能性 *orientability* はオイラー標数とともに重要な役割をはたすものである。上の 2 つの例を参考にすると、次のように簡単に見分けられることがわかる。すなわち、多辺形モデルの語において、周辺のラベルが「すべて x と x^{-1} の対で構成されているならば、向きづけ可能」であり、「 x と x の対が少なくとも 1 組あるならば、向きづけ不可能」である。

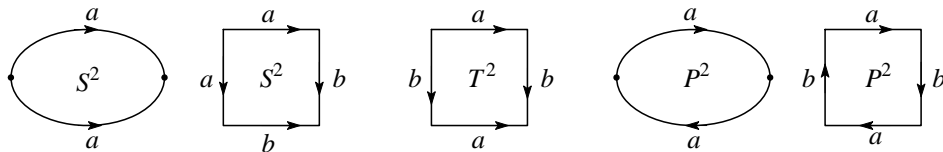
問 4.1 多辺形モデルが次の語で表される曲面について、閉曲面かどうか、向き付け可能かどうかを答えよ。

- (1) $abc^{-1}b^{-1}c$ (2) $acb^{-1}ca^{-1}b$ (3) $a^{-1}bca^{-1}c^{-1}d$ (4) $ab^{-1}ac^{-1}b^{-1}c$ (5) $aca^{-1}bdc^{-1}b^{-1}d^{-1}$

例 4.4 以下の曲面では、すべての辺が対になっていて、単独のラベルをもつ辺がないので、境界をもたないことが確認できる。

- (1) 球面 $S^2 = \underline{aa^{-1}}$ (2 辺形) または $S^2 \approx \underline{abb^{-1}a^{-1}}$ (4 辺形) … 向き付け可能
 (2) トーラス $T^2 = \underline{aba^{-1}b^{-1}}$ … 向き付け可能
 (3) 射影平面 $P^2 = \underline{aa}$ (2 辺形) または $P^2 \approx \underline{abab}$ (4 辺形) … 向き付け不可能

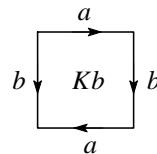
特に下線の語をそれぞれの曲面の標準形とする。



例 4.5 右図のような 4 辺形モデルをクラインの壺 *Klein bottle* という。これを Kb と表すことにする。その語は

$$Kb = \underline{abab^{-1}} \quad (\text{標準形})$$

である。 Kb は 3 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内で全体像を見ることはできない向きづけ不可能な閉曲面である。この図形の名称はドイツの数学者クライン (Felix Christian Klein, 1849-1925) にちなんで付けられた。

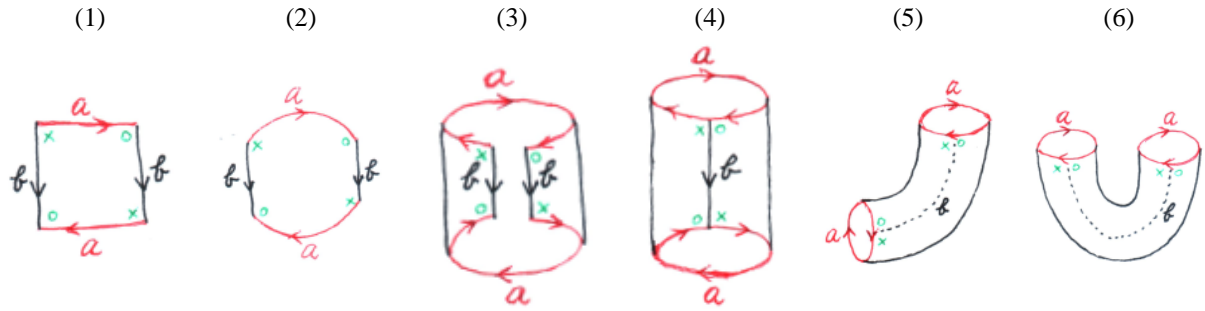


☞ 上の図で Kb のオイラー標数を求めると、 $v - e + f = 1 - 2 + 1 = 0$ である。同じオイラー標数を持ち、標準形が似ている曲面にトーラス T^2 があるが、両者は向き付け可能かどうかで区別される。多辺形モデルの図で、対になっている 2 組の辺が下図のように同じ向きか、それともどちらか一方の対が逆向きかということで見分けることもできる。

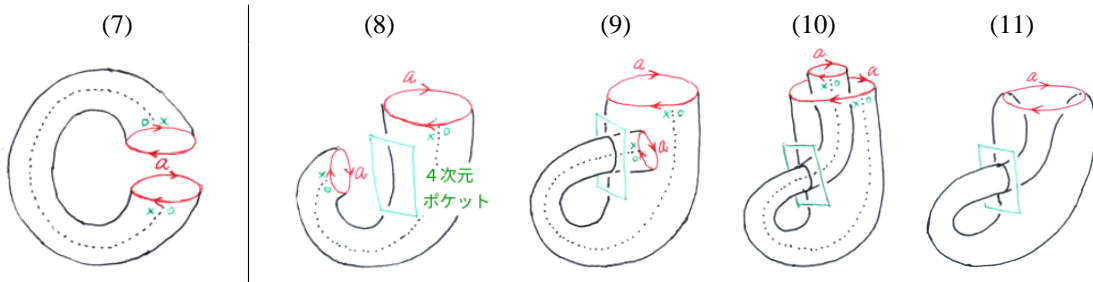
	T^2	Kb
オイラー標数	0	0
向き付け	可	不可



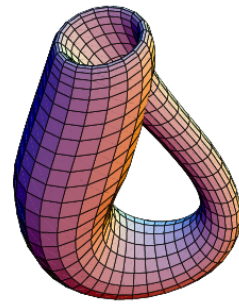
\mathbb{R}^3 内で Kb の全体像を想像すると以下のように考えられている。(1) でまず辺 b を貼り合わせて円筒状の形 (4) にして、(5) ~ (6) のように伸ばしながら曲げていく。



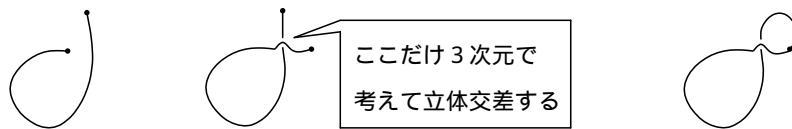
ところが (7) でラベル a の辺の向きが合わないのでそのまま貼り合せることはできない. そこで発想の転換をして, 次元を上げて円筒の曲げた部分を 4 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^4 内で操作し, 自分自身の円筒の内部へ伸ばし, それを (9) とする. その図を見ると曲面が自己交差しているが, 4 次元空間 \mathbb{R}^4 内で考えると自己交差していない.



自分自身の内部でさらに伸ばした円筒の先端を見ると (10) のように辺 a の向きが一致するので, そこで貼り合せて境界のない曲面げできる. 右はこうしてできあがった曲面の想像図である. 3 次元空間 \mathbb{R}^3 内で作図すると, 内部に入り込む部分が自分自身と交差するようになるが, 4 次元空間 \mathbb{R}^4 内で考えると交差していないのである.

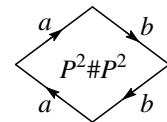


分かりにくいので次元を下げた状態で考えてみよう. 下図右のように 2 次元平面 \mathbb{R}^2 上に曲線があり, 両端を貼り合わせるために一方の先端を伸ばしていくとき, どうしても自分自身を横切っていかなければならないとする. このとき自己交差しないようにするために次元を一つあげて 3 次元空間 \mathbb{R}^3 で考え, 自分自身をまたいで反対側へ伸ばせばよいというアイデアである.

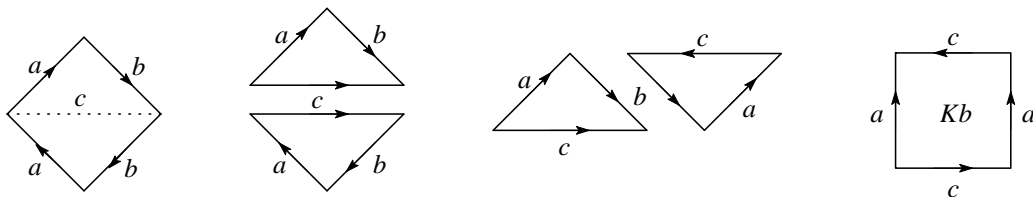


【定理 4.1】 $P^2 \# P^2 \approx Kb$

証明 まず 2 つの射影平面を連結させると例 3.14 で見たように右図のような多边形モデルになる.



次に, これを下図のように点線 c で切って 2 つに分け, 辺 b を貼り合せるとよい.

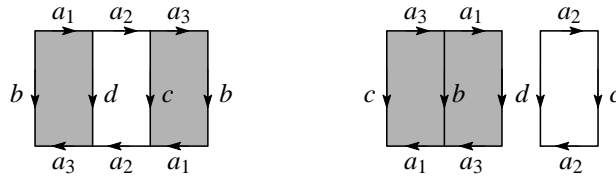


上の図で変形の流れを強調する意味で \Rightarrow で示しているが, この流れは可逆的であるので \Leftrightarrow または \approx と解釈せよ. これ以降も図を使う変形の過程で同様とする.

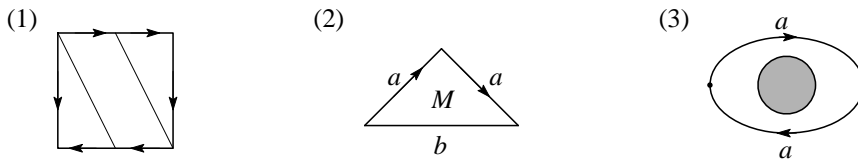
問 4.2 定理 4.1 を用いてクラインの壺のオイラー標数 $\chi(Kb)$ を求めよ.

例 4.6 クラインの壺を切り離して2つのメビウスの帯に分けることができる.

解 クラインの壺の4辺形モデル(例 4.5)を下図の左のように3分割し、塗りつぶした部分の辺 b を貼り合
せると2つのメビウスの帯になる. //



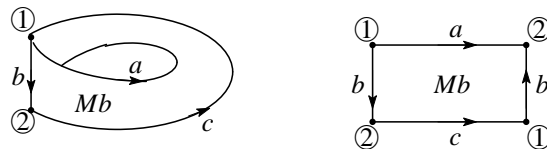
問 4.3 次の図を使って問に答えよ.



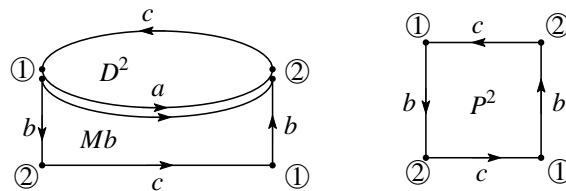
- (1) クラインの壺を図のように切り離すことで、2つのメビウスの帯に分けることができることを確かめよ.
- (2) 図の3辺形で表される曲面 M について、 $M \approx Mb$ であることを示せ.
- (3) 射影平面 P^2 に穴をあけたものはメビウスの帯 Mb と同相であることを示せ.

例 4.7 メビウスの帯 Mb の境界に円盤 D^2 の境界を貼り合せると射影平面 P^2 が得られる.

解 メビウスの帯(例 4.3)を図のように切り開くとき、その境界は辺 a と c である.



円盤 D^2 を2辺形で表し、その辺を a, c とする. メビウスの帯 Mb と閉円盤 D^2 の境界を向きを考えて貼り合
せると、下図のように射影平面 P^2 ができる. //



問 4.4 多辺形モデルの図を使って、次の問に答えよ.

- (1) 2つの円盤 D^2 をもってきて、その境界を貼り合せると球面 S^2 が得られる.
- (2) 問 4.3 (2) の閉曲面 M の境界と円盤 D^2 の境界を貼り合せると P^2 が得られる.

§ 4.2 語の演算

ここからは閉曲面を対象に、多辺形の図を使う説明を、語の演算を用いる議論に置き換えることを考えよ
う. 辺のラベルが大文字 A, B, C, \dots の場合は「単独の辺, または複数の辺をまとめたもの, または無すなわち

まったく辺のない空っぽのもの」を表すとする。なお混乱を避けるために単独の辺のラベルに e, f, g, v, w の小文字は使わないことにする。

【定義 4.2】 $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

例 4.8 球面の4辺形モデルの語より, $S^2 = abb^{-1}a^{-1} = ab(ab)^{-1}$ だから, ここで $x = ab$ とおくと, 2辺形モデルの語 $S^2 = xx^{-1}$ になる。

【定理 4.2】語の演算則 1

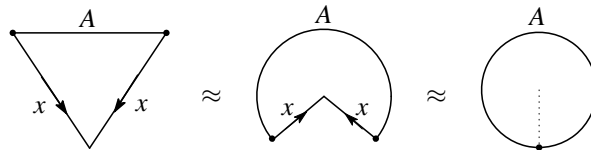
(1) $(a^{-1})^{-1} = a$

(2) $Axx^{-1} \approx A$ (A は空でないとする)

(3) $A = a_1a_2 \cdots a_n$ とするとき,
 $A = a_2a_3 \cdots a_na_1 = a_3a_4 \cdots a_na_1a_2 = \cdots = a_na_1a_2 \cdots a_{n-1}$
 $A^{-1} = a_n^{-1} \cdots a_2^{-1}a_1^{-1} \approx A$

(4) $A = a_1a_2 \cdots a_n, B = b_1b_2 \cdots b_m$ とするとき,
 $AB = a_1a_2 \cdots a_nb_1b_2 \cdots b_m = a_2 \cdots a_nb_1b_2 \cdots b_ma_1 = \cdots = b_1b_2 \cdots b_ma_1 \cdots a_n = BA$

証明 (2) を説明する。下図のように、辺 x を貼り合わせることで、隣り合う x と x^{-1} は消えて語は A だけとなる。



☞ 曲面の名称と語を区別なく使っていることに注意。命題を正確に言うならば、(2) の場合は「 Axx^{-1} を語とする曲面を M_1 とし、 A を語とする曲面を M_2 とするならば、 $M_1 \approx M_2$ である」と、また (3) の場合は「 A を語とする曲面を M_1 とし、 A^{-1} を語とする曲面を M_2 とするならば、 $M_1 \approx M_2$ である」と書くべきであるが、煩雑になるので上のように簡略して書いている。

例 4.9 球面の場合 $S^2 = abb^{-1}a^{-1}$ であるが、ここで bb^{-1} が消えて $S^2 = aa^{-1}$ となる。

例 4.10 上の演算則から次の結果が得られる。(n は自然数)

$$(1) nT^2 = \underbrace{a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}}_{T^2} \underbrace{a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}}_{T^2} \cdots \underbrace{a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}}_{T^2}$$

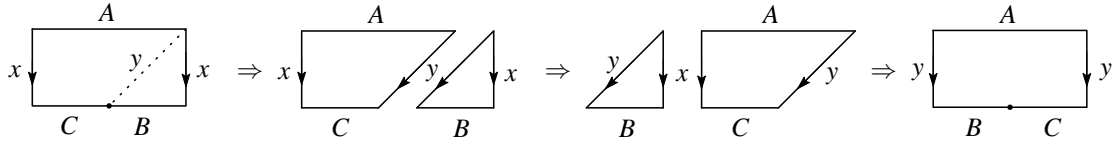
$$(2) nP^2 = \underbrace{a_1a_1}_{p^2} \underbrace{a_2a_2}_{p^2} \cdots \underbrace{a_na_n}_{p^2}$$

【定理 4.3】語の演算則 2 (A, B, C は空でないとする)

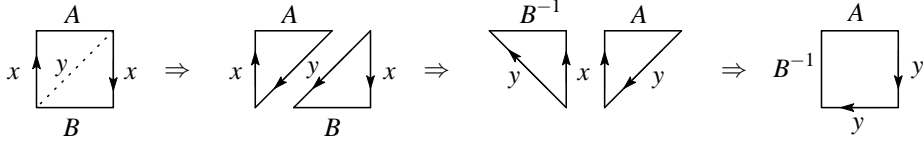
(1) $AxBCx^{-1} \approx AxCBx^{-1}$ (アニュラス演算)

(2) $AxBx \approx AxxB^{-1}$ (メビウス演算)

証明 (1) 図のようにアニュラスの辺のラベル順を変えることができる。最後の5辺形のラベル y を改めて x と書き直す。



(2) 図のようにメビウスの帯の辺のラベル順を変えることができる。最後の4辺形のラベル y を改めて x と書き直す。



⇨ 定理 4.3 の 2 種類の演算則は重要であり、たとえば次のように図解するなどしてしっかり覚えよう。ある辺 x に着目して、「 $x =$ と $x^{-1} =$ 」または「 $x^{-1} =$ と $x =$ 」と見て以下の式変換をすればよい。上の証明で式変換の流れを強調して「ならば矢印」で示しているが「同相 \approx 」の意味である。

- アニュラス演算則： と に挟まれた辺 BC は交換できる

$$A \quad BC \quad A \quad CB$$

- メビウス演算則： と に挟まれた辺 B は向きを変えて外に（うしろに）出せる。背負い投げ

$$A \quad B \quad A \quad B^{-1}$$

または、 と並んだ後ろの辺は逆向きにして間に挟むことができる。押さえ込み

$$A \quad B \quad A \quad B^{-1}$$

例 4.11 次の関係式を語の演算で示せ。

(1) $ab^{-1}ca^{-1}c^{-1}b \approx T^2$ (2) $abc^{-1}a^{-1}cb \approx P^2\#Kb$

解 (1) アニュラス演算則を適用する。

$$\begin{aligned} ab^{-1}ca^{-1}c^{-1}b &= (a)b^{-1}(c)(a^{-1}c^{-1})b \\ &\approx (a)b^{-1}(a^{-1}c^{-1})(c)b \\ &\approx ab^{-1}a^{-1}(c^{-1}c)b \\ &\approx ab^{-1}a^{-1}b = T^2 \end{aligned}$$

(2) メビウス演算則を適用する。

$$\begin{aligned} abc^{-1}a^{-1}cb &= (a)b(c^{-1}a^{-1}c)b \\ &\approx (a)bb(c^{-1}a^{-1}c)^{-1} \\ &= (a)bb(c^{-1}ac) \\ &= (bb)(c^{-1}aca) = P^2\#Kb \end{aligned}$$

⇨ 呼び方について

アニュラス演算とメビウス演算でなく、アニュラス操作とメビウス操作と言ってもよいが、これらの名称は必ずしも広く一般に定まったものではない。しかし語の演算をするとき、非常に重要な方法（操作）であり、それぞれ向き付け可と不可の場合に応じて必須のものである。

テキストによっては、円筒演算とメビウス演算と呼んだり、また別の象徴的な意味でハンドル操作とクロスキャップ操作と呼ぶものもある。

例 4.12 $Kb \approx 2P^2$ （定理 4.1）

解 メビウス演算則を適用すると $P^2\#P^2 = aabb = abba \approx aba^{-1}b = Kb$ //

向き付け可能な曲面と不可能な曲面を連結させると、どんな曲面になるのだろうか？これは非常に興味深い問題であり、また重要な問題でもある。向き付け可能でもなく不可能でもないという奇妙な曲面になるのだろうか？もしそうだとすれば、曲面がもつ固有の性質には、オイラー標数と向き付け可能性のほかにも第3の特性があることになり、それは何かという問題が発生することになる。しかしそのようなことはなく、向き付け可能な曲面と不可能な曲面を連結させると、向き付け可能な部分は消滅して、不可能な曲面になるのである。その根拠となるのは次の重要な定理である。

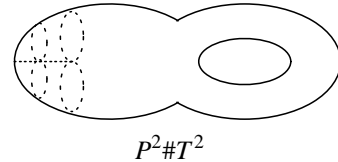
【定理 4.4】 射影平面 P^2 とトーラス T^2 を連結させると、それは射影平面 P^2 にクラインの壺 Kb を連結させた曲面になる. すなわち

$$P^2 \# T^2 \approx P^2 \# Kb$$

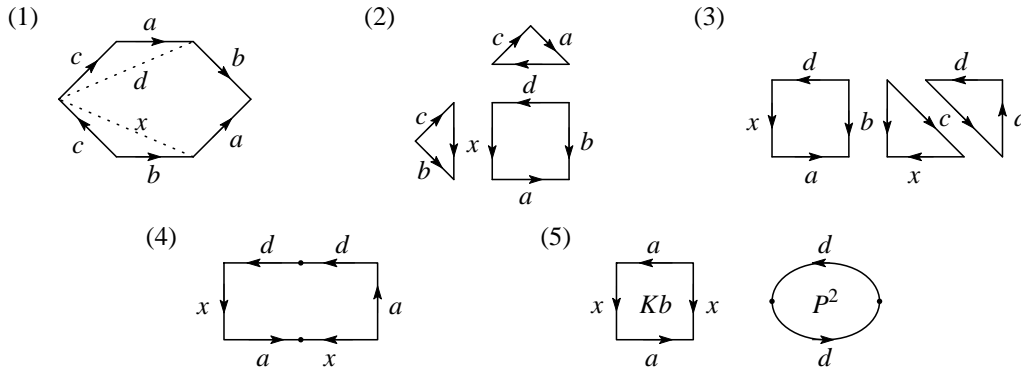
このようにトーラス T^2 は消滅して、 $P^2 \# T^2 \approx 3P^2$ となる.

【証明】 メビウス演算則を適用する.

$$\begin{aligned} P^2 \# T^2 &= (cc)(aba^{-1}b^{-1}) = (a^{-1}b^{-1})cc(ab) \\ &\approx (a^{-1}b^{-1})c(b^{-1}a^{-1})c \\ &= (a^{-1}ca^{-1})b^{-1}(c)b^{-1} \\ &\approx (a^{-1}ca^{-1})b^{-1}b^{-1}c^{-1} \\ &= (c^{-1}a^{-1}ca^{-1})(b^{-1}b^{-1}) = Kb \# P^2 \end{aligned}$$



多角形モデルの図を使って下の (1)~(5) のように説明することもできる. ただし以下の図は上の証明をそのまま図に置き換えたものではないことに注意.



問 4.5 次の関係式を語の演算則 1 または演算則 2 を用いて示せ.

- (1) $abca^{-1}b^{-1}c \approx 3P^2$ (2) $abca^{-1}b^{-1}c^{-1} \approx T^2$ (3) $abca^{-1}c^{-1}b^{-1} \approx T^2$
 (4) $abacbc \approx 3P^2$ (5) $abca^{-1}cb \approx 2P^2$

問 4.6 次の閉曲面を語の演算則 1 または演算則 2 を用いて、それと同相な nT^2 または nP^2 の形 (n は自然数) で表せ. なお関係式 $P^2 \# T^2 \approx P^2 \# Kb$ (定理 4.4) と $Kb \approx 2P^2$ (定理 4.1) は使ってよいとする.

- (1) $abcbac$ (2) $abcba^{-1}c$ (3) $abxd^{-1}ba^{-1}dyxy$
 (4) $abcb^{-1}dc^{-1}d^{-1}a^{-1}$ (5) $aba^{-1}cdb^{-1}c^{-1}d^{-1}$

問 4.7 次の関係式を導け. (m, n は自然数とする)

- (1) $mT^2 \# nP^2 \approx (n+2m)P^2$ (2) $\chi(mT^2 \# nP^2) = 2 - n - 2m$

§ 4.3 閉曲面の分類定理

閉曲面 M の多角形モデルは偶数個の辺を持ち、ラベル $a_1, a_2, \dots, a_n, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}$ の列で表される. その多角形の語の長さすなわち辺の個数を $w(M)$ のように、また複数の辺をまとめて A とするとき辺の長さを $w(A)$ のように表すとする. 語の長さが最小のものは次の 2 種類である.

$$w(M) = 2 \Rightarrow M \approx S^2 = aa^{-1} \quad (\text{向き付け可}) \quad \text{または} \quad M \approx P^2 = aa \quad (\text{向き付け不可})$$

次に小さいものは $w(M) = 4$ の場合であるが、ラベルの配列を考えると次の 5 種類しかない.

- 向き付け可の場合 : (1) $aa^{-1}bb^{-1} \approx aa^{-1} = S^2$ (2) $aba^{-1}b^{-1} = T^2$
- 向き付け不可の場合 : (3) $aabb = P^2\#P^2$ (4) $abab \approx P^2$ (5) $abab^{-1} = Kb \approx P^2\#P^2$

ただし本質的な意味で 4 辺形であるのは (2) と (3) だけである. したがって

$$w(M) = 4 \Rightarrow M \approx T^2 \quad (\text{向き付け可}) \quad \text{または} \quad M \approx 2P^2 \quad (\text{向き付け不可})$$

である.

もっと長い語について考えてみよう.

【定理 4.5】 $AaBbCa^{-1}Db^{-1} \approx ADCBaba^{-1}b^{-1} = (ADCB)\#T^2$

【証明】 アニュラス演算則を使うと

$$\begin{aligned} AaBbCa^{-1}Db^{-1} &= Aa(B)(bC)a^{-1}Db^{-1} \\ &\approx Aa(bC)(B)a^{-1}Db^{-1} \\ &= Aab(CB)(a^{-1}D)b^{-1} \\ &\approx Aab(a^{-1}D)(CB)b^{-1} \\ &= ba^{-1}DCBb^{-1}Aa \\ &= ba^{-1}(DCB)(b^{-1}A)a \\ &\approx ba^{-1}(b^{-1}A)(DCB)a \\ &= aba^{-1}b^{-1}ADCB \\ &= T^2\#(ADCB) \end{aligned}$$

【定理 4.6】 向き付け可能な閉曲面は球面 S^2 であるかまたは n 個のトーラスの連結和 nT^2 と同相である.

【証明】 M は向き付け可能な閉曲面とし, 定理 4.2 (2) に該当する辺をすべて取り除いていくものとする. $w(M) = 2$ または $w(M) = 4$ の場合については上で見たとおりなので, $w(M) \geq 6$ とする. すると

$$M = Aa_1Ba_1^{-1}C = a_1Ba_1^{-1}CA \quad B \neq \emptyset$$

と表すことができる. このような表現は辺 a_1 の取り方によっていくつか考えられるが, $w(B)$ の値が最小になる辺 a_1 を選ぶものとする. 次に B から一つの辺 b_1 を選び取ると, b_1^{-1} は CA に含まれている. なぜなら, もし b_1^{-1} が B に含まれているなら a_1 を選んだ理由に反するからである. すると

$$B = B_1b_1B_2 \quad CA = D_1b_1^{-1}D_2 \quad M = a_1B_1b_1B_2a_1^{-1}D_1b_1^{-1}D_2$$

となるが, 定理 4.5 により

$$M \approx (D_2D_1B_2B_1)(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}) \approx M_1\#T^2 \quad M_1 = D_2D_1B_2B_1 \quad w(M_1) \leq w(M) - 4$$

となる. ここで M_1 に対して同様に考えれば

$$M_1 \approx M_2a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \quad M \approx M_2\#2T^2$$

となり, この操作を続ければ, $M \approx nT^2$ が得られる. //

☞ 上の証明の操作を見れば「向き付け可能な閉曲面の場合, S^2 の場合を除き, 多边形モデルの辺の個数は 4 の倍数であり, ラベルの列 $aba^{-1}b^{-1}$ の繰り返しになる」ことがわかる. なお, 4 辺ずつ切り離してゆくと, 最後に 2 辺が残るように思うかもしれないが, 残ったとしてもそれは xx^{-1} なので問題ない.

【定理 4.7】向き付け不可能な閉曲面は n 個の射影平面の連結和 nP^2 と同相である.

【証明】 M は向き付け不可能な閉曲面とするとその多辺形モデルの語には少なくとも 1 組の a と a の辺があるので $M = AaBa$ とおくと, メビウス演算則により

$$M \approx AaaB^{-1} = (B^{-1}A)aa \approx M_1 \# P^2 \quad M_1 = B^{-1}A \quad w(M_1) \leq w(M) - 2$$

である. ここで M_1 が向き付け可能ならば前の定理 4.6 により $M_1 \approx mT^2$ となるので,

$$M \approx (mT^2) \# P^2$$

であるが, さらに定理 4.4 によりすべての T^2 が消滅して $M \approx nP^2$ の形となる.

M_1 が向き付け不可能ならば上と同様に考えると, $M \approx M_2 \# P^2 \# P^2$ となる. この議論を続けてゆくと, ある自然数 n により $M \approx nP^2$ となる. //

定理 4.6 と定理 4.7 をまとめると, 下の表 (左) のようになる. 空欄は, そのような閉曲面は存在しないことを意味する. このように閉曲面, すなわち境界を持たないコンパクトな 2 次元の多様体の分類はオイラー標数と向きづけ可能性という 2 つの固有の特性により解決したのである.

オイラー標数	向き付け可能	向き付け不可能	種数 g	向き付け可能	向き付け不可能
2	S^2		0	S^2	
1		P^2	1	T^2	P^2
0	T^2	$2P^2 \approx Kb$	2	$2T^2$	$2P^2$
-1		$3P^2$	3	$3T^2$	$3P^2$
-2	$2T^2$	$4P^2$	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots			

球面でない閉曲面 M は n 個のトーラスの連結和か, または n 個の射影平面の連結和であるので, その個数を種数 *genus* と呼び, 記号 g で表すとしよう. すなわち

$$g(M) = \begin{cases} \frac{2 - \chi(M)}{2} & \text{向きづけ可能な場合} \\ 2 - \chi(M) & \text{向きづけ不可能な場合} \end{cases}$$

である. すると閉曲面は種数と向きづけ可能性によって上の表 (右) のように分類されるということもできる.

☞ 種数とは, 向き付け可能な閉曲面の場合は球面 S^2 にあけられた穴の個数 ($g = 0$ すなわち穴がないのが S^2) であり, 向き付け不可能な閉曲面の場合は S^2 につけられたクロスキャップの個数を意味するということもできる. すると, 位相幾何学的には, 茶碗と球面は, また, コーヒーカップとトーラスはそれぞれ同じ種類の図形である.



例 4.13 $g(T^2 \# P^2) = 3$

【解】 定理 4.4 より $T^2 \# P^2 \approx 3P^2$ だから

$$g(T^2 \# P^2) = 2 - \chi(3P^2) = 2 - (-1) = 3$$

問 4.8 次の関係式を導け. $g(mT^2 \# nP^2) = 2m + n$ (m, n は自然数)

問 4.9 次の種数を求めよ.

- (1) $g(4T^2 \# 2S^2)$ (2) $g(2T^2 \# 6P^2)$ (3) $g(6T^2 \# 2P^2)$