

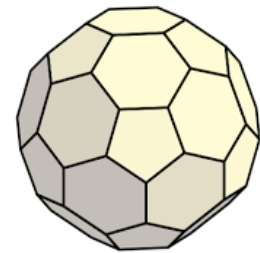
第3章 曲面と三角分割

この章から対象とする図形を曲面に絞り、より詳しく考察しよう。曲面とは何か？その定義を明らかにしてみると、3次元ユークリッド空間の中では全体像を見ることのできない曲面もあることがわかる、さまざまな曲面を統一的に扱う方法として、曲面を平面モデル化するアイデアについて学ぼう。

§3.1 曲面

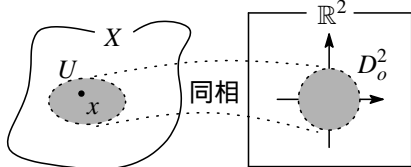
我々は3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 の中で図形を見ているので図形 X とは \mathbb{R}^3 の部分集合のことである。対象を「曲面」という図形に絞って考えることにしよう。そのためにはまず曲面というものを正確に定義しなければならない。

代表的な曲面として思い浮かぶのは球面であろう。我々は地球という球面の上で生活しているが、身の回りの地面は平らである。球面 S^2 において各点 x の適当な近傍 U を考えると、それは平面の一部分（すなわち \mathbb{R}^2 の部分空間）と見る（近似する）ことができる。すると右図のように、球面は2次元の小さな平面で鱗（うろこ）のように覆われているとも考えられる。これを一般化して、位相空間 $X = (X, \mathcal{A})$ が次の2条件を満たすとき X を曲面 *surface* という。



球面のイメージ図

- S1: 各点 $x \in X$ に対して、その点を含む開集合 $U \in \mathcal{A}$ があり、 U は単位開円盤 D_o^2 または単位半開円盤 $\{x \in D_o^2 \mid x_2 \geq 0\}$ と同相である。
- S2: 任意の異なる2点 x, y に対して $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ となる開集合 U, V がある、



⇨ 別の言い方をすると、曲面とは2次元の多様体 *manifold* のことである。また条件 S2 はハウスドルフの分離条件という。ただし多様体の詳しいことについては第6章以降で議論する。

開円盤 D_o^2 ではなく、半開円盤と同相になる点のところは曲面の境界になる。それを次に定義しよう。

一般に曲面 X について、各点 $x \in X$ に対して単位開円盤に同相な開集合を U_x とする。もしある点 x では単位開円盤に同相な開集合がない（単位半開円盤に同相なものはある）場合には $U_x = \emptyset$ とすると決めて、和集合 $X_o = \bigcup_{x \in X} U_x$ と表すとする。 $X \setminus X_o$ を境界 *boundary* という。 $X \setminus X_o = \emptyset$ のとき、 X は境界をもたないという。さらに、境界をもたない曲面でコンパクトなものを閉曲面 *closed surface* という。

⇨ この章から次の章にかけて、最終的目標は「閉曲面の分類」すなわち「境界をもたないコンパクトな2次元多様体の分類」である。

例 3.1 右図のような円柱面（天井と底の面を含まない側面だけ）

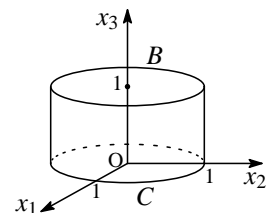
$$An = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1, 0 \leq x_3 \leq 1\}$$

は境界をもつコンパクトな曲面である。

解 $An = S^1 \times [0, 1]$ であり、境界は

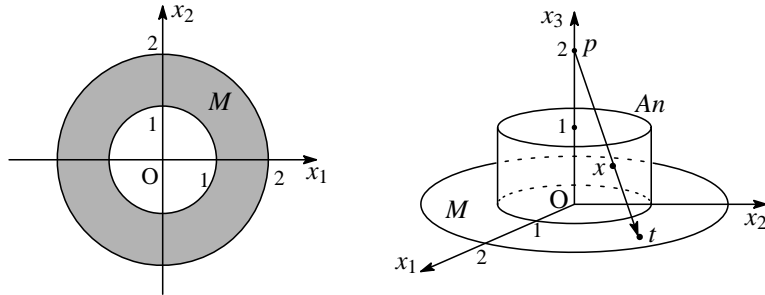
$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in An \mid x_3 = 1\} \text{ と } C = \{(x_1, x_2, x_3) \in An \mid x_3 = 0\}$$

である。また、 An は \mathbb{R}^3 内の有界な閉集合なのでコンパクトである。 //



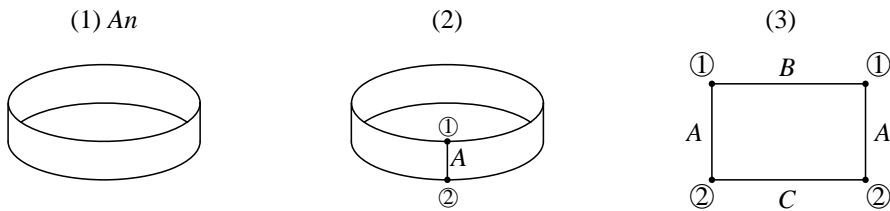
下図左のように \mathbb{R}^2 内の同心円で囲まれた図形 $M = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq (t_1)^2 + (t_2)^2 \leq 2\}$ をアニュラス *annulus* という. M は \mathbb{R}^2 内の有界な閉集合なのでコンパクトである. また, 図を見ると各点 $x \in M$ に対して半径の小さい円盤 U を考えると, U は単位開円盤 D_0^2 または単位半開円盤と同相になることがわかる.

下図右のように, 定点 $p(0, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$ からのステレオ射影 $\varphi : An \rightarrow M$ により $An \approx M$ である. これにより, 円柱面 An もアニュラスということにする.

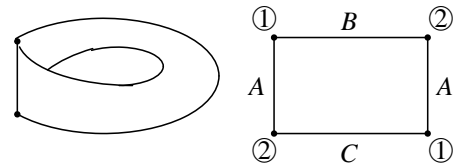


問 3.1 例 3.1 のステレオ射影 φ について, $t = \varphi(x)$ と $x = \varphi^{-1}(t)$ の式を求めよ.

☞ 下図 (1) の円柱面 An を (2) のように境界上に点①と②をとり, その 2 点を結ぶ辺 A で切り離すと, 平面的な図形 (3) になる. 今後はアニュラス An を図 (3) で考えることが多くなる.



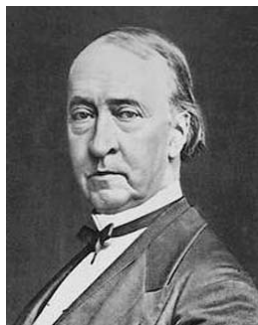
例 3.2 上図 (2) のように辺 A で切り離したあと, 点①と②が合うように一度ひねって貼り合せると, 右図のような捩れた曲面ができる. これはメビウスの帯 *Möbius loop* または *Möbius band* と呼ばれる有名な図形である. これを Mb と表すことにする. これもコンパクトな曲面であるが, 境界をもつので閉曲面ではない. また An と Mb は同相でない.



☞ メビウスの帯という名称はドイツの数学者メビウス (August Ferdinand Möbius, 1790-1868) にちなんで付けられたものである. ただしほとんど同じ時期にリスティング (Johann Benedict Listing, 1808-1882) も同じ図形を発見し, メビウスより早く論文で発表しているという. また, リスティングはトポロジー *Topology* という言葉の名付け親である. ただしトポロジーが数学の一つの分野として大きく発展するのはフランスの数学者ポアンカレ (Jules-Henri Poincaré, 1854-1912) の研究からである.



メビウス



リスティング



ポアンカレ

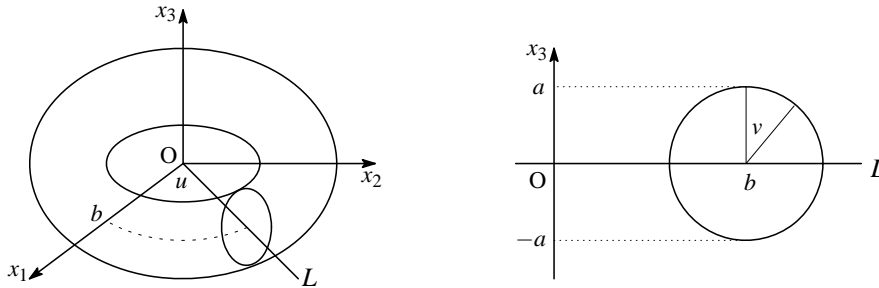
例 3.3 球面 S^2 は閉曲面である.

解 $U_1 = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}, U_2 = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$ とおく. 問 2.12 で考えたように, $U_1 \approx \mathbb{R}^2$ また $U_2 \approx \mathbb{R}^2$ である. すべての点 $x \in S^2$ は $x \in U_1$ または $x \in U_2$ であり, $S^2 = U_1 \cup U_2$ だから, S^2 は境界をもたない曲面である. さらに S^2 は \mathbb{R}^3 内の有界な閉集合だからコンパクトである. //

例 3.4 a, b は定数で $0 < a < b$ とするとき, 下図のようなドーナツ形をした, \mathbb{R}^3 の部分集合

$$T^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = (b + a \sin v) \cos u, x_2 = (b + a \sin v) \sin u, x_3 = a \cos v\}$$

をトーラス *torus* という. ここで u, v は下図の角度である. トーラス T^2 は閉曲面である.

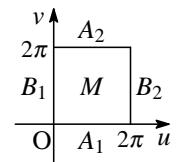


解 \mathbb{R}^2 内の部分集合 $M = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi\}$ において

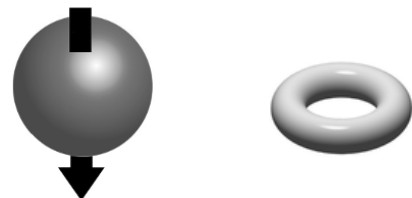
辺 $A_1 = [0, 2\pi] \times \{0\}$ と $A_2 = [0, 2\pi] \times \{2\pi\}$ を同一視

辺 $B_1 = \{0\} \times [0, 2\pi]$ と $B_2 = \{2\pi\} \times [0, 2\pi]$ を同一視

すると境界はなくなり, $T^2 \approx S^1 \times S^1$ である. また S^1 は \mathbb{R}^2 においてコンパクトなので $S^1 \times S^1$ はコンパクトであり, したがって T^2 は閉曲面である. //



☞ 上の説明のようにトーラス T^2 は半径 a の小さな円を x_3 軸のまわりに回転してできる図形であり, したがって円環面または輪環面とも言われるが, 別の考え方もあり, 右図のように球面 S^2 に貫通する孔を一つあけた図形と考えることもできる.



なお, 球面に貫通する穴をあけるという発想は閉曲面の分類で重要な意味をもっていることがあとで分かる.

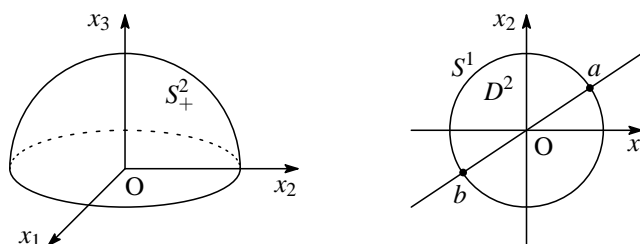
また $S^1 \times S^1$ がコンパクトであることについては定理 5.5 でも考える.

例 3.5 球面 S^2 から以下のように生成される曲面を射影平面 *projective plane* といい, P^2 と表す. これは閉曲面である.

\mathbb{R}^3 内の原点を通る直線と球面 S^2 との 2 つの交点を同一視した位相空間が射影平面 P^2 である. 詳しくは § 5.3 と § 6.3 で議論するが, 簡単に説明すると, まず半球面

$$S^2_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_3 \geq 0\}$$

を考える. $S^2_+ \approx D^2$ である. この境界は円周 S^1 である. 下図右で, 原点に対称な点 $a \in S^1$ と $b \in S^1$ を同一視してできる曲面が P^2 であり, 境界のない曲面である. コンパクトであることは D^2 が有界な閉集合であることから導かれるが, 詳しいことは § 5.3 で考える.

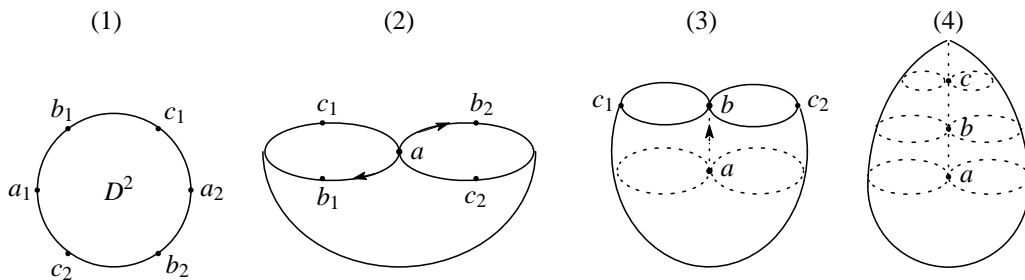


境界の同一視の仕方を考えると、射影平面 P^2 を 3 次元空間 \mathbb{R}^3 内の図形として実際に見ることはできない。 P^2 は 4 次元空間 \mathbb{R}^4 内の図形であることが知られている。第 5 章以降で一般の n 次元の射影空間 P^n について議論するが、特に $n = 2$ のとき P^2 を射影平面という。

射影平面 P^2 を 3 次元空間 \mathbb{R}^3 内の図形として無理やり作って見ると、以下ようになる。

- (1) まず円盤 D^2 の境界 S^1 上にいくつかの点をとる。
- (2) 点 a_1 と a_2 を同一視して 1 点 a にする。
- (3) 次に矢印の方向に貼り合せながら点 b_1 と b_2 を同一視して 1 点 b にする。
- (4) 同様に、点 c_1 と c_2 を同一視して 1 点 c にする。

最終的に図 (4) の「とんがり帽子」のような図形が想像できる。その貼り合せ部分をクロスキャップ *crosscap* という。



\mathbb{R}^4 内のクロスキャップと呼ばれる図形を三角帽子のように単純化して考えるならば、射影平面 P^2 とは、球面 S^2 に穴をあけて、その穴をクロスキャップという三角帽子で塞いだものとイメージしてよい。



§ 3.2 オイラー標数

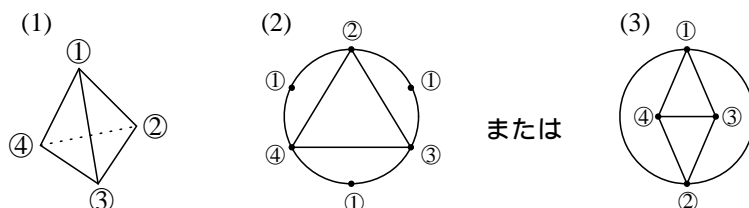
ここから第 4 章終りまで、曲面を平面的な図形に置き換えて議論する方法を考えよう。頂点を①,②,⋯ と表し、辺を a, b, \dots のように表す。また、頂点の数を v 、辺の数を e 、面の数を f と表すことにする。

例 3.6 正 4 面体の平面的な図形（展開図）をかいて、オイラーの多面体公式を再確認しよう。

解 正 4 面体 (1) を平面的な図形に切り開いて連続的に展開すると下図 (2) または (3) のようにいろいろ考えられる。

(2) 頂点は 6 個あるように見えるが、同じ番号の点は同一視するので実際は 4 個である。辺についても ①と②を両端にもつ辺は同一視するので、異なる辺の数は 6 個である。面の数は 4 個である。したがって $v - e + f = 4 - 6 + 4 = 2$ となる。

(3) 頂点と面の数は図の通りで、それぞれ 4 個ずつである。辺は 7 個あるように見えるが、頂点①と②を結び左右の外周は同一視するので、異なる辺の数は 6 個である。したがって $v - e + f = 4 - 6 + 4 = 2$ となる。



一般に、単純閉曲線上に有限個の頂点が並んだ図形を多边形ということにしよう. すると上の例では、図(2)は6边形の内部を4つの3边形に分割したものであり、図(3)は2边形の内部を4つの3边形に分割したものである.

いろいろな曲面を平面上の多边形に置き換え、頂点や辺の同一視に注意しながら、 $v-e+f$ の値を求めることを考えよう. このとき統一的に議論ができるように、オイラーの多面体定理(定理1.2)の証明で考えたように、多边形の内部をすべて三角形に分割する. それは次のように定義されている.

【定義3.1】 曲面 M の有限個の部分集合族 $\{ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \}$ があり、条件

- D1: 各 τ_i は三角形と同相
- D2: $\tau_1 \cup \tau_2 \cup \dots \cup \tau_n = M$
- D3: 任意の τ_i, τ_j に対して、共通部分 $\tau_i \cap \tau_j$ は次のどれかに限る.
「空集合 \emptyset 」または「一つの共通の頂点」または「一つの共通の辺」

を満たすとき、 M は三角分割可能であるという.

曲面 M を三角分割し、頂点の個数、辺の個数、面の個数をそれぞれ v, e, f としたとき、 $v-e+f$ の値を曲面 M のオイラー標数 *Euler characteristic* といい、 $\chi(M)$ と表す.

☞ オイラー標数を「オイラー数」と呼ぶ本もある. ただしオイラー数 *Euler number* と呼ばれるまったく別のものであり、混同しないように、標数 *characteristic* という用語を使う. 記号 χ はギリシア文字で「カイ」と読む.

同相な曲面は同じ三角分割をもつことになるので次の重要な定理が成り立つ.

【定理3.1】 $M_1 \approx M_2 \Rightarrow \chi(M_1) = \chi(M_2)$

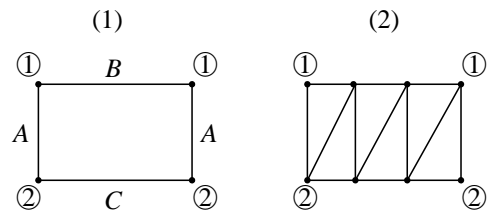
この定理から「オイラー標数が異なる曲面は同相でない」と結論付けることができる.

以下、代表的な曲面について三角分割とオイラー標数を考えてみよう. まず、閉曲面でないアニュラス An とメビウスの帯 Mb の場合について考える.

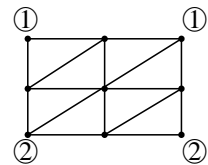
例3.7 $\chi(An) = 0$

解 例3.2 で見たようにアニュラス An は右図(1)のように4边形で表すことができる. ここで同じ番号の頂点は同一視され、また①と②を結ぶ辺も同一視される. この状態で数えると、 $v-e+f=2-3+1=0$ である.

右図(2)は頂点と辺を加えて、三角分割したものであり、やはり $v-e+f=6-12+6=0$ である.



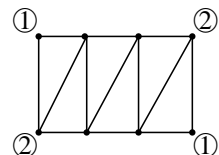
問3.2 アニュラス An について、上の例3.7の図(1)から、右図のような三角分割を考えたとする. しかしこれは正しい三角分割になっていないことを調べよ. ただしそれでも $v-e+f=0$ となる. それを確かめよ. さらに面の形が三角形でないものを含む分割をいろいろ考え $v-e+f$ を求め、オイラー標数は変わらないことを確かめよ.



☞ 一般に、正しい三角分割になっていない場合でも、また、面の形が三角形でないものがあったとしても、 $v-e+f$ の数はオイラー標数と変わらない.

例3.8 $\chi(Mb) = 0$

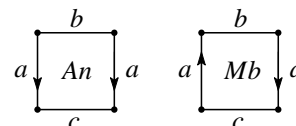
解 メビウスの帯の多边形を右図のように三角分割すると $\chi(Mb) = 6-14+8=0$ となる. ただし、例3.2の図により、 $\chi(Mb) = 2-3+1=0$ とわかる.



立体的な形をした曲面を平面的な多边形にして見るとき、頂点は脇役に置き、辺を主役にして考えることにしよう。このとき同一視する辺について、元の立体的な形が得られるように貼り合わせる向きが重要であるので、それを辺に向き（矢印）を付けて示すことにする。すなわち、以下の (i) ~ (iii) に従って平面的な多边形に情報を加えたものを曲面の多边形モデルという。

- (i) 辺に名前 a, b, c, \dots をつけ、これをラベルと呼ぶ。
- (ii) 同一視する辺には同じラベルを付け、貼り合わせる方向を矢印で示す。また貼り合わせることで、その辺は境界でなくなる。
- (iii) 単独のラベルが付いた辺は境界である。

例 3.9 アニュラス An とメビウスの帯 Mb の多边形モデルを比較すると、右図のようになる。



ラドー



パパキリアコプーロス



ヒーウッド

ラドー (Tibor Radó, 1895-1965) はハンガリー生まれの数学者で、1929 年にアメリカに移住し、プラトーの問題を解決するなど多くの業績を残した。一般に、閉曲面を三角分割できるかどうかは簡単な問題ではなく、1952 年にラドーによって肯定的に解決された。

パパキリアコプーロス (Christos Dimitrios Papakyriakopoulos, 1914-1976) はギリシアの数学者で、1943 年にオイラー標数は三角分割の仕方によらない位相不変量であること (基本予想) を証明した。三角分割の仕方によって v, e, f の値が変わり、したがって $\chi(M)$ も変わるのではないかと疑問をもつかもしれないが、そのようなことはないのである。

ヒーウッド (Percy John Heawood, 1861-1955) はイギリスの数学者で四色問題に一生を捧げた。トーラスの場合は 7 色で色分け可能なことを示した。

【定理 3.2】(ラドーの定理) 任意の閉曲面は三角分割可能である。

これにより閉曲面は有限個の 3 辺形を貼り合せてできたものということになり、具体的に球面 S^2 やトーラス T^2 などは「いくつかの 3 辺形を、どのように貼り合せればいいのか」が問題となる。

また、三角分割を考えるとき、頂点の数はできるだけ少ない方がよいが、いくらでも少なくできるわけではない。

【定理 3.3】(ヒーウッドの不等式) 閉曲面 M のオイラー標数を χ とする。三角分割したとき、頂点の数を v とすると次の不等式が成り立つ。

$$v^2 - 7v + 6\chi \geq 0$$

証明 辺の数を e 、面の数を f とすると、まず明らかに

$$v > 3 \quad \text{かつ} \quad e \leq \binom{v}{2} \quad \dots(1)$$

であり、定義より

$$v - e + f = \chi \quad \dots(2)$$

である. 辺と面の個数の関係を考えて, 閉曲面では各辺はちょうど2つの面に含まれ, 各面がちょうど3つの辺を含むことから

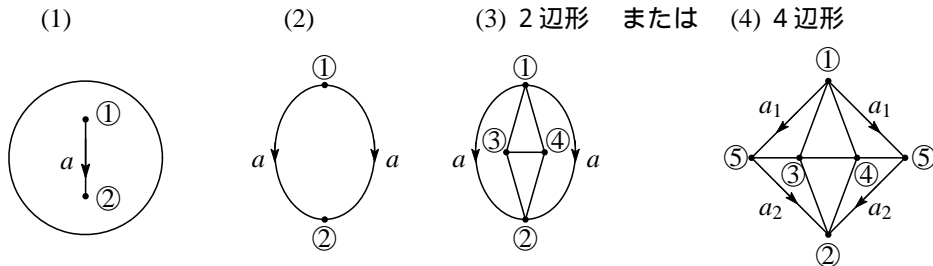
$$2e = 3f \quad \dots(3)$$

である. (2) と (3) から $v - \frac{1}{3}e = \chi$ となり, さらに (1) から $v - \chi \leq \frac{1}{3} \binom{v}{2} = \frac{v(v-1)}{6}$ となり, $v^2 - 7v + 6\chi \geq 0$ が得られる. //

例 3.10 $\chi(S^2) = 2$

解 球面は正4面体と同相だから, 例 3.6 より $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$ である. または, 次のように考えることもできる.

- (1) 球面上に適当に2点①と②をとり, 切り込みを入れる.
- (2) 切り開いて穴を広げ, 平面上に伸ばすと例 3.6 で見た2辺形ができる.

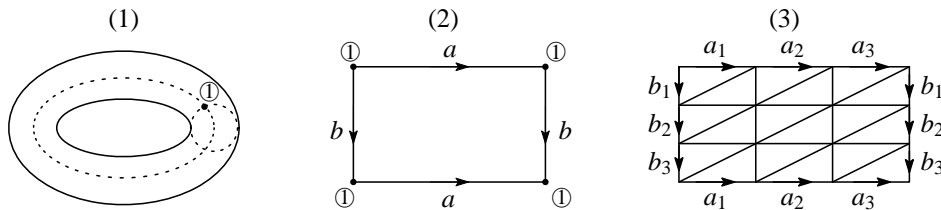


- (3) 2辺形の内部に2つの頂点③ ④をとると, $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$ となる.
- (4) または辺 a の途中に頂点⑤をとって4辺形にし, 三角分割すると, $\chi(S^2) = 5 - 9 + 6 = 2$ となる. //

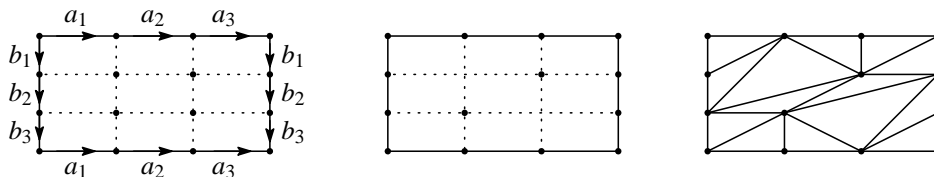
☞ S^2 の場合, 定理 3.3 より $v^2 - 7v + 12 \geq 0$ であり, 三角分割に必要な頂点の数は $v \geq 4$ であることがわかる. 上の例では (3) が $v = 4$ のときである.

例 3.11 $\chi(T^2) = 0$

解 トーラスの下图 (1) において, 点①のところでも十字に (点線に沿って) 切り開いて4辺形モデル (2) を作る. これを (3) のように三角分割すると $\chi(T^2) = 9 - 27 + 18 = 0$ となる. //



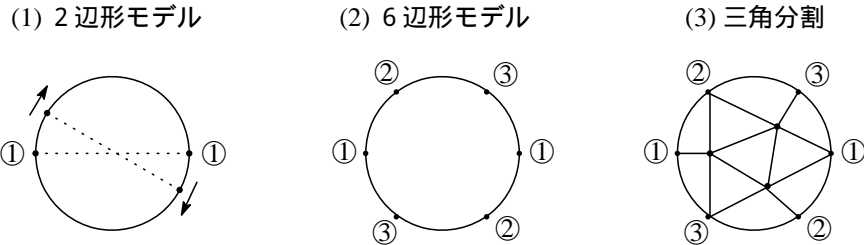
ここでは9つの頂点をとって三角分割したが, 定理 3.3 より $v^2 - 7v \geq 0$ だから, 三角分割に必要な頂点の数は最低7つである. 上の例の (3) の図を参考に, ちょうど7つの頂点でトーラス T^2 を三角分割することを考えてみよう. まず9つの頂点を残し, 内部の辺を消してしまうと下图の左のようになる. さらに内部の4つの点のうち2つを消すと中央のようになる. 例 3.11 の図 (3) の辺を一部利用して, 内部の頂点と周囲の点とを結ぶことで下图の右の三角分割が得られる. このとき $v - e + f = 7 - 21 + 14 = 0$ となる. トーラス T^2 の場合, 頂点の数をこれよりも少なくして三角分割することはできない.



☞ 上の4辺形図 (2) で $\chi(T^2) = v - e + f = 1 - 2 + 1 = 0$ とわかる.

例 3.12 $\chi(P^2) = 1$

解 射影平面 P^2 は例 3.5 で説明したように、平面上の円盤 D^2 の境界 S^1 上の原点对称の位置にある 2 点を同一視して得られる閉曲面である。下図 (2) のように 6 辺形モデルを作り、(3) のように三角分割すると $\chi(P^2) = 6 - 15 + 10 = 1$ となる。 //



定理 3.3 より $v^2 - 7v + 6 \geq 0$ であり、三角分割に必要な頂点の数は 6 つ以上である。したがって上図 (3) の三角分割は頂点の数が最も少ないものである。

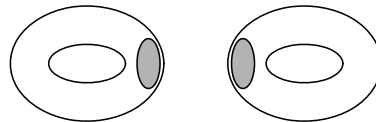
☞ 上の 2 辺形図 (1) で $\chi(P^2) = v - e + f = 1 - 1 + 1 = 1$ とわかる。

§ 3.3 連結和

複雑な形の曲面を単純な曲面に分解して考える手法について考えよう。たとえば右図のように 2 つの穴があるトーラスを考えると、そのオイラー標数を求めるにはどうしたらよいただろうか。

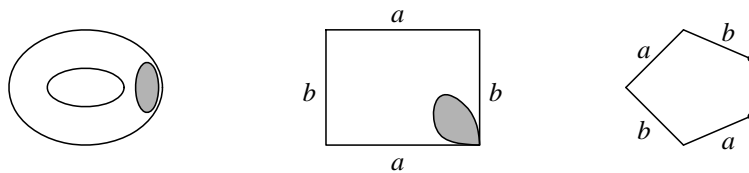


これは下図のように穴をあけた 2 つのトーラスを貼り合わせて穴をふさぎ、右図のような形を作ると考えるのである。このようにして作られたものを連結和 *connected sum* といい、 $T^2 \# T^2$ と表す。

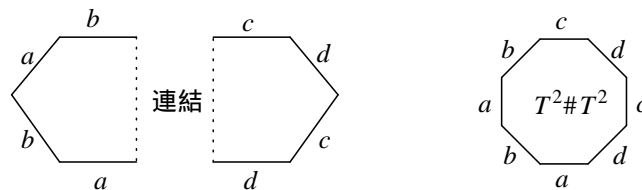


例 3.13 連結和の多辺形モデルの作り方について、 $T^2 \# T^2$ を例に説明しよう。

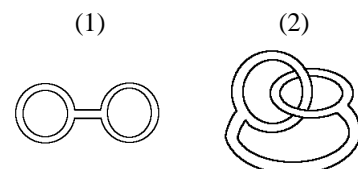
トーラスに穴をあけ、その穴の境界上の点で例 3.11 で考えたように切り開き、4 辺形に広げる。穴の境界を仮の辺と見なした多辺形を考える。



そのような多辺形を 2 つ用意して、穴の境界で貼り合せる。連結和 $T^2 \# T^2$ は辺の個数が倍に増えた 8 辺形で表される。



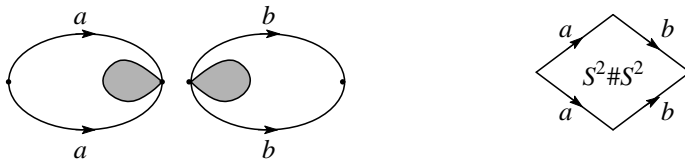
☞ 連結和 $T^2 \# T^2$ は右図 (1) のメガネの形と同相（連続的に変形可能）である。また、図 (2) のように 2 つの輪が絡んだものとも同相である。(2) を連続的に変形して (1) の形にすることができることを考えてみよう。



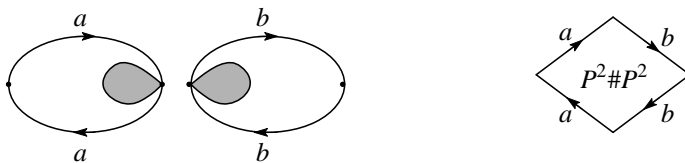
一般に、2つの曲面 M_1 と M_2 があるとき、それぞれに穴をあけ貼り合わせてできる連結和を $M_1 \# M_2$ と表す。一般に、 M_1 が m_1 辺形モデルで M_2 が m_2 辺形モデルでそれぞれ表されているならば $M_1 \# M_2$ の多辺形モデルは $m_1 + m_2$ 辺形となる。さらに連結和 $M_1 \# M_2$ と M_3 の連結和 $(M_1 \# M_2) \# M_3$ も考えられる。こうして次々に複雑な曲面が考えられるが、逆に複雑な曲面を連結和という考え方でどんどん分解していくと、よく知られた曲面をピースとして成り立っていることも分かる。それは次章で議論しよう。

例 3.14 連結和の多辺形モデルを具体的な例で確かめてみよう。

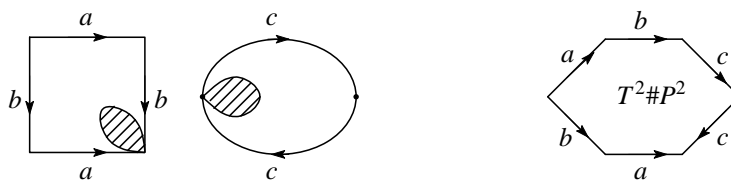
(1) $S^2 \# S^2$ 例 3.10 の 2 辺形を用いて



(2) $P^2 \# P^2$ 例 3.12 の 2 辺形を用いて

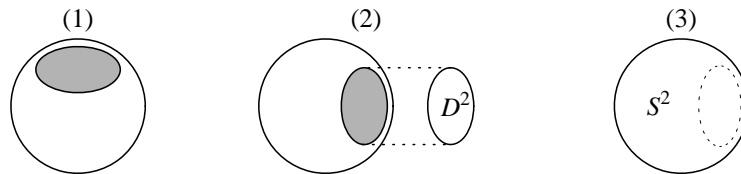


(3) $T^2 \# P^2$



例 3.15 $S^2 \# S^2 \approx S^2$

解 球面 S^2 に穴をあけたものは下図 (1) であるが、これは問 2.14 により、円盤 D^2 と同相である。すると、もう一つの球面に穴をあけて連結するとき、下図 (2) のように D^2 で穴をふさぐことになり、一つの球面 (3) に戻る。 //



この例から、任意の曲面 M と球面 S^2 との連結和を作るとき、曲面 M にあいた穴が球面によってふさがれ、曲面 M が復元されることがわかる。したがって、次の結果が得られる。

【定理 3.4】任意の閉曲面 M に対して $M \# S^2 \approx M$

例 3.16 $T^2 \# S^2 \approx T^2$, $P^2 \# S^2 \approx P^2$

【定理 3.5】(連結和のオイラー標数) 閉曲面 M_1, M_2 について次の等式が成り立つ。

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$$

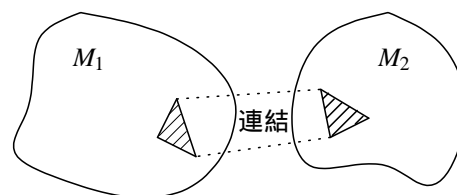
証明 2つの閉曲面 $M_i (i=1,2)$ をそれぞれ三角分割し、頂点、辺、面の数を $v(M_i), e(M_i), f(M_i)$ と表す. M_i から面を一つずつとって連結すると

$$v(M_1 \# M_2) = v(M_1) + v(M_2) - 3$$

$$e(M_1 \# M_2) = e(M_1) + e(M_2) - 3$$

$$f(M_1 \# M_2) = f(M_1) + f(M_2) - 2$$

となるからである. //



例 3.17 次の結果が得られる.

$$(1) \chi(S^2 \# S^2) = \chi(S^2) + \chi(S^2) - 2 = 2 + 2 - 2 = 2$$

$$(2) \chi(T^2 \# T^2) = \chi(T^2) + \chi(T^2) - 2 = 0 + 0 - 2 = -2$$

$$(3) \chi(P^2 \# P^2) = \chi(P^2) + \chi(P^2) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

例 3.18 $\chi(S^2 \# T^2 \# P^2) = -1$

解 定理 3.4 より $S^2 \# T^2 \# P^2 \approx T^2 \# P^2$ だから

$$\begin{aligned} \chi(S^2 \# T^2 \# P^2) &= \chi(T^2 \# P^2) && \text{定理 3.1 より} \\ &= \chi(T^2) + \chi(P^2) - 2 && \text{定理 3.5 より} \\ &= 0 + 1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

//

【定理 3.6】 n 個の閉曲面 M の連結和 $M \# \dots \# M$ を nM と表す. 閉曲面 M のオイラー標数を $\chi(M) = m$ とするとき、次の等式が成り立つ.

$$\chi(nM) = (m-2)n + 2$$

証明 数学的帰納法で示す. $n=1$ のとき, $\chi(M) = m - 2 + 2 = m$ であり, 等式は成り立っている. $n=k$ のとき成り立つとする. すなわち

$$\chi(kM) = (m-2)k + 2$$

と仮定する. $n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} \chi((k+1)M) &= \chi(kM \# M) = \chi(kM) + \chi(M) - 2 && \text{定理 3.5 より} \\ &= (m-2)k + 2 + m - 2 && \text{仮定より} \\ &= (m-2)(k+1) + 2 \end{aligned}$$

となり, 成り立つことがわかる. したがって等式はすべての自然数 n について成り立つ. //

この定理から次の結果が得られる.

【定理 3.7】 自然数 n に対して, 次の関係式が成り立つ.

$$(1) \chi(nS^2) = 2 \quad (2) \chi(nT^2) = 2 - 2n \quad (3) \chi(nP^2) = 2 - n$$

問 3.3 次のオイラー標数を求めよ.

- (1) $\chi(4T^2)$ (2) $\chi(5P^2)$ (3) $\chi(3T^2 \# 2S^2)$ (4) $\chi(2T^2 \# 6P^2)$