第2章　位相空間

図形の辺や面を連続的に（切り離したり破いたりせずに）引き伸ばしたり曲げたりする変形について数学的な意味づけを考えよう. そのために最低限必要なものは何なのか, 本質的なものは何なのかについて深く考えてみよう. ここでは集合論の基本的な知識が必要である.

§2.1　近傍から開集合へ

まず, 解析学での関数の連続性について, 次の教科書を参考にして, 詳しく見ることから始めよう.

参考 上見練太郎ほか著「微分」改訂版（共立出版）

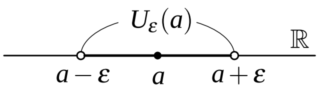
関数 $f:A\to\mathbb{R}$（ここで $A\subset\mathbb{R}$）が点 $a\in A$ において**連続**であることの定義.　参考 p.29

★１　任意の $\varepsilon>0$ に対しある $\delta>0$ を定めると, $|x-a|<\delta$ であるすべての $x\in A$ について $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ がなりたつ.

ここで $|x-a|$ は２点 x,a 間の距離であり, これを $d(x,a)$ と表し, 関数 $f:A\to\mathbb{R}$ を写像 $\varphi:W\to\mathbb{R}$ と書き換え, 論理記号を用いて表すと★１は次の★２のようになる.

★２　$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ \ s.t.\ d(x,a)<\delta\ \Rightarrow\ d(\varphi(x),\varphi(a))<\varepsilon$

さらに「点 a について $d(x,a)<\varepsilon$ であるすべての点 x の集合」を点 a の**イプシロン近傍**と呼び, $U_\varepsilon(a)=\left\{\, x\in\mathbb{R}\ \middle|\ d(x,a)<\varepsilon \,\right\}$ と表す.　参考 p.61



すると上の★２は次のように書き換えることができる.

★３　$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ s.t.\ \varphi(U_\delta(a))\subset U_\varepsilon(\varphi(a))$

このように条件文★１を★３までに変えることで連続であることの定義は一般の $\mathbb{R}^n$ の場合にも通用できるようになる. たとえば２次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の場合, ２点間の距離は

$$d(a,b)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$　参考 p.59

であり, 点 $a\in\mathbb{R}^2$ のイプシロン近傍 $U_\varepsilon(a)$ は「点 a を中心とし, 半径 $\varepsilon>0$ の円板」である.　参考 p.61

以上のように, 写像の連続性は**距離**によって定義されていると分かる. そこで「距離とは何か？」について改めて考え直してみよう.

一般に n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の２点 $a(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ と $b(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 間の距離は

$$d(a,b)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2}$$　**ユークリッド距離** *Euclidean distance*

と定義され, 以下の関係式を満たしている.

E1 :　$d(a,b)\geq 0\quad \forall a,b\in\mathbb{R}^n$　（等号が成り立つのは $a=b$ のとき）

E2 :　$d(a,b)=d(b,a)$

E3 :　$d(a,b)+d(b,c)\geq d(a,c)$　（三角不等式）

発想の転換をして, 関係式 E1, E2, E3 を満たすことが距離の本質であると考え, 次のように距離を定義する.

【定義 2.1】 集合 X において, 次の３条件を満たす関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ があるとき, d を**距離** *metric* といい, X を**距離空間** *metric space* という. この３条件を**距離の公理**という.

D1 : $d(a,b) \geq 0 \quad \forall a,b \in X$ （等号が成り立つのは $a = b$ のとき）

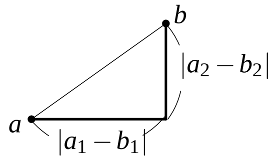
D2 : $d(a,b) = d(b,a)$

D3 : $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$ （三角不等式）

例 2.1 平面 $\mathbb{R}^2$ において, ２点間の距離を

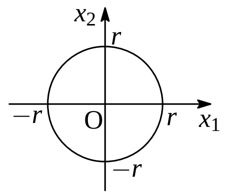
$$d(a,b) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

のように定めると, これは距離の公理を満たす. これを**マンハッタン距離** *Manhattan distance* という. これは左図のように, 直角三角形の底辺の長さと高さを合計したものである. それに対して, ユークリッド距離はその三角形の斜辺の長さである.

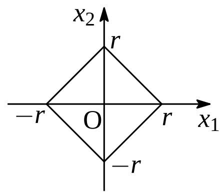


距離の定義式が違えば図形も違ったものになる. たとえば, 円は「中心と呼ばれる定点からの距離が一定である点の軌跡」であるが, 原点を中心として半径 r の円をかくと, ユークリッド距離の場合は右図①であるが, マンハッタン距離の場合は右図②のようになる.

① $(x_1)^2 + (x_2)^2 = r^2$



② $|x_1| + |x_2| = r$



問 2.1 ユークリッド距離を $d_E(a,b)$, マンハッタン距離を $d_M(a,b)$ と表すことにする. ２点 $a(-2,6), b(1,2)$ があるとき, 次の問に答えよ.

(1) $d_E(a,b)$ と $d_M(a,b)$ を求めよ.

(2) 次の集合を図示せよ. $A = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, d_E(a,x) = 2 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, d_M(b,x) = 2 \right\}$

問 2.2 平面 $\mathbb{R}^2$ において, ユークリッド距離による近傍を $U_\varepsilon(a)$ とし, マンハッタン距離による近傍を $V_\delta(a)$ と表すとする. 任意の $U_\varepsilon(a)$ に対して, $V_\delta(a) \subset U_\varepsilon(a)$ となる δ が存在すること, 逆に, 任意の $V_\delta(a)$ に対して, $U_\varepsilon(a) \subset V_\delta(a)$ となる ε が存在することを示せ.

以下, おもに $\mathbb{R}^2$ 上でユークリッド距離をもとに議論を進めるが, それは一般次元の $\mathbb{R}^n$ でも同様である.

【定義 2.2】 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ があるとき, 点 a が A の**内点** *interior point* であるとは

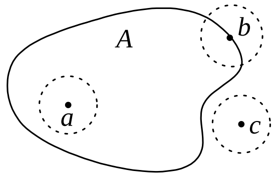
$$\exists \varepsilon > 0 \ s.t.\ U_\varepsilon(a) \subset A$$ 参考 p.61

となること. 点 a が集合 A の**外点** *exterior point* であるとは,「点 a が補集合 $\mathbb{R}^2 \setminus A$ の内点である」こと. 内点でも外点でもない点を**境界点** *boundary point* という.

右図のように集合 A と点 a,b,c を考え, それぞれの近傍を点線で囲まれた円（ただし半径 ε は異なる）で示すと,

- ▷ $U_\varepsilon(a) \subset A$ だから a は A の内点である.
- ▷ $U_\varepsilon(c) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ だから c は A の外点である.
- ▷ どんな ε に対しても $U_\varepsilon(b) \subset A$ にも $U_\varepsilon(b) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ にもならないので b は A の境界点である.

イメージ図



【定義 2.3】 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A が**開集合** *open set* であるとは, A に属する点はすべて内点であること. すなわち,

$$\forall a \in A,\ \exists \varepsilon > 0 \ s.t.\ U_\varepsilon(a) \subset A$$

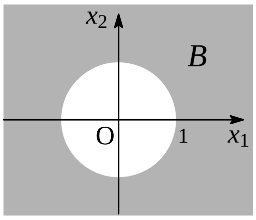
となること. 開集合の補集合を**閉集合** *closed set* という.

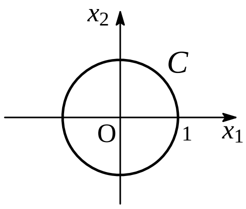
問 2.3 次のことを確認せよ.

(1) 開区間 $L = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}$ は $\mathbb{R}^1$ の開集合である.

(2) １点 $a \in \mathbb{R}^2$ だけから成る集合 $A = \{\, a \,\}$ は開集合ではなく, 閉集合である. また, 点 a は A の境界点である.

(3) $B = \{\, x(x_1, x_2) \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 > 1 \,\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であり, その境界点の集合は円周 $C = \{\, x(x_1, x_2) \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 \,\}$ である.





☞ 以後, $\mathbb{R}^n$ の開集合族を $\mathscr{O}$ と表すことにする.

問 2.4 次のことを証明せよ. ただし $A \cap B \neq \emptyset$ とする.

(1) $A, B \in \mathscr{O} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathscr{O},\;\; A \cap B \in \mathscr{O}$

(2) 閉集合族を $\mathscr{C}$ と表すとき

$A, B \in \mathscr{C} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathscr{C},\;\; A \cap B \in \mathscr{C}$

これにより, 有限個の開集合 $A_1, A_2, \cdots A_n$ について, その和集合 $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ も共通部分 $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ も開集合であることが導かれるが, 無限個の場合は

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{O} \quad \cdots \text{(I)} \qquad\qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{O} \quad \cdots \text{(II)}$$

(I) は成り立つが, (II) は必ずしも成り立つとは限らない.

例 2.2 $\mathbb{R}^1$ において

$$A_k = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{k} < x < \frac{1}{k} \,\right\} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

を考えると, $A_k \in \mathscr{O}$（$k \in \mathbb{N}$）であるが, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{\, 0 \,\} \notin \mathscr{O}$ となるから, (II) は成り立たない.

問 2.4 では $A \cap B \neq \emptyset$ としたが, $\emptyset \in \mathscr{O}$ と決めておけばこの前提条件は不要となる. また, 明らかに $\mathbb{R}^n$ 自身は開集合だから $\mathbb{R}^n \in \mathscr{O}$ である. 以上の議論をまとめると, 次のようになる.

〖**定理 2.1**〗$\mathbb{R}^n$ の開集合族 $\mathscr{O}$ は次の性質をもつ.

(1) $\emptyset \in \mathscr{O}, \quad \mathbb{R}^n \in \mathscr{O}$

(2) $A_1, A_2, \cdots, A_m \in \mathscr{O} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcap_{i=1}^{m} A_i \in \mathscr{O}$ 　（有限個数）

(3) $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{O} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcup_{k} A_k \in \mathscr{O}$ 　（有限または無限和）

§2.2　位相空間

前節の定理 2.1 で, $\mathbb{R}^n$ の開集合族 $\mathscr{O}$ が持つ性質を見たが, その性質を十分条件として議論を始めよう.

【定義 2.4】一般に集合 X についてその部分集合から成る集合族 $\mathscr{A}$ を考えたとき, 次の 3 条件が満たされるならば X を**位相空間** *topological space* といい, $\mathscr{A}$ をその**開集合系**という. また $\mathscr{A}$ に属する部分集合を**開集合** *open set* という.

$$\mathbf{T}1: \quad \emptyset \in \mathscr{A}, \quad X \in \mathscr{A}$$

$$\mathbf{T}2: \quad A_1, A_2, \cdots, A_m \in \mathscr{A} \ \Rightarrow \ \bigcap_{i=1}^{m} A_i \in \mathscr{A}$$

$$\mathbf{T}3: \quad A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{A} \ \Rightarrow \ \bigcup_{k} A_k \in \mathscr{A}$$

ここで, **T**2 は有限個の部分集合に対する条件であり, **T**3 は有限個または無限個の部分集合に対する条件である. 上の 3 条件を**開集合の公理** *axioms of open sets* という. このとき「開集合系 $\mathscr{A}$ によって集合 X に位相を入れる」ということもある.

☞ そのとき集合 X を**空間**と呼び, 開集合系 $\mathscr{A}$ とあわせて, $(X, \mathscr{A})$ または $X = (X, \mathscr{A})$ と表すことがある. 同じ集合 X に対して, もし別の開集合系 $\mathscr{B}$ を考えるならば $X = (X, \mathscr{B})$ はまったく別の空間として扱う. 特に, $\mathbb{R}^n$ は常にユークリッド距離による近傍と開集合系 $\mathscr{O}$ を考えた位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathscr{O})$ として扱うものとする.

例 2.3 集合 $X = \{\ 1, 2, 3\ \}$ について考える.

(1) $\mathscr{A} = \{\ \emptyset, X, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\ \}$ とすると, $(X, \mathscr{A})$ は位相空間である.

(2) $\mathscr{B} = \{\ \emptyset, X, \{1,2\}, \{2,3\}\ \}$ とすると, $(X, \mathscr{B})$ は位相空間でない.

解 (1) 開集合の公理が満たされることを確認する. 条件 **T1** は明らかだから, 条件 **T2** と **T3** が満たされるかどうかを調べる. そのために $A_1 = \{1\}, A_2 = \{1,2\}, A_3 = \{1,3\}$ とおいて, 右の表を作ってみると分かりやすい. 部分集合の和 $\cup$ と積 $\cap$ について集合族 $\mathscr{A}$ は閉じていることが分かり, したがって $(X, \mathscr{A})$ は位相空間である.
(2) 否定するには, 反例となるものを一つ示すだけでよい. たとえば $A_2 \cap A_3 = \{2\}$ であるが $\{2\} \notin \mathscr{B}$ だから, 集合族 $\mathscr{B}$ は開集合の公理のうち条件 **T2** を満たさないからである.

$\cap$ \ $\cup$	A_1	A_2	A_3
A_1		A_2	A_3
A_2	A_1		X
A_3	A_1	A_1	

開集合の補集合を**閉集合** *closed set* という. $X = X \setminus \emptyset$ また $\emptyset = X \setminus X$ という関係から, 全体集合 X と空集合 $\emptyset$ は開集合でもあり閉集合でもある.

例 2.4 集合 $X = \{\ 1, 2, 3\ \}$ について, 上の例 2.3(1) の開集合系 $\mathscr{A}$ を考えるとき, 閉集合をすべて求めよ.

解 X と $\emptyset$ 以外の各開集合の補集合を考えると

$$X \setminus \{1\} = \{2,3\}, \quad X \setminus \{1,2\} = \{3\}, \quad X \setminus \{1,3\} = \{2\}$$

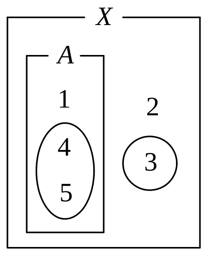
したがって, 閉集合は $X, \emptyset, \{\ 2\ \}, \{\ 3\ \}, \{\ 2,3\ \}$ の 5 つである. //

【定義 2.5】 位相空間 $X = (X, \mathscr{A})$ において, 部分集合 $A \subset X$ があるとき, 点 a が A の**内点** *interior point* であるとは

$$\exists U \in \mathscr{A} \ s.t.\ a \in U \subset A$$

となること. 点 a が集合 A の**外点** *exterior point* であるとは,「点 a が補集合 $X \setminus A$ の内点である」こと. 内点でも外点でもない点を**境界点** *boundary point* という.

例 2.5　集合 $X = \{1,2,3,4,5\}$ に対して, 開集合系 $\mathscr{A} = \{\emptyset, X, \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{3\}, \{4,5\}\}$ を定め, 位相空間とするとき, 部分集合 $A = \{1,4,5\}$ の内点, 外点, 境界点を調べよう.



解　点 1 の場合, $1 \in U \subset A$ となる開集合 U は $\mathscr{A}$ の中にないから内点ではない. したがって 1 は A の境界点である. 点 4 の場合, $U = \{4,5\} \in \mathscr{A}$ とすると, $4 \in U \subset A$ となるので, 4 は A の内点である. 同様に 5 も A の内点である. 一方, $X \setminus A = \{2,3\}$ であり, 点 2 の場合, $2 \in U \subset X \setminus A$ となる開集合 U は $\mathscr{A}$ の中にないから, 2 は A の外点ではない. したがって 2 は A の境界点である. 点 3 の場合, $U = \{3\} \in \mathscr{A}$ とすると, $3 \in U \subset X \setminus A$ となるので, 3 は A の外点である.　//

【定義 2.6】 位相空間 $X = (X, \mathscr{A})$ において, 全体集合 X と空集合 $\emptyset$ 以外に「開集合でもあり閉集合でもある」部分集合はないとき X は**連結** *connected* であるという. 逆に, **非連結** *disconnected* であるとは

$$\exists A, B \in \mathscr{A} \ s.t.\ A \neq \emptyset \ \wedge \ B \neq \emptyset \ \wedge \ A \cap B = \emptyset \ \wedge \ A \cup B = X$$

が成り立つことである.

例 2.6　集合 $X = \{\ 1,2,3\ \}$ について,

(1) $\mathscr{A} = \{\ \emptyset, X, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\ \}$ とすると, $(X, \mathscr{A})$ は連結な位相空間である.

(2) $\mathscr{B} = \{\ \emptyset, X, \{1\}, \{2,3\}\ \}$ とすると, $(X, \mathscr{B})$ は非連結な位相空間である.

例 2.7　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2, \mathscr{O})$ は連結な位相空間である. 一般に n 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ も同様である.

問 2.5　$X = \{\ a,b,c,d\ \}$ は $\mathscr{A} = \{\ \emptyset, X, A_1, A_2, A_3, A_4\ \}$ を開集合系とする位相空間である. ここで $A_1 = \{\ a,b\ \}$ とする. 残りの部分集合 A_2, A_3, A_4 を定めよ. そのとき X は連結か, または非連結か.

【定義 2.7】 位相空間 $X = (X, \mathscr{A})$ の部分集合 W に対して

$$\mathscr{A}_W = \left\{\ A \cap W \ \middle|\ A \in \mathscr{A}\ \right\}$$

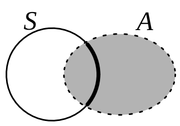
とすれば, $\mathscr{A}_W$ は開集合の公理を満たすから, $(W, \mathscr{A}_W)$ は位相空間となる. これを**部分位相空間**という. または簡単に**部分空間** *subspace* という.

問 2.6　定義 2.7 の $\mathscr{A}_W$ が開集合の公理を満たすことを証明せよ.

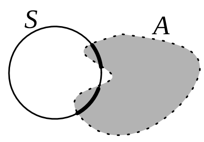
今後 $\mathbb{R}^2$ における幾何学的図形（円, 三角形, 四角形など）を考えるとき, それを単なる点の集合としてでなく, $(\mathbb{R}^2, \mathscr{O})$ の部分位相空間として扱う.

例 2.8　$\mathbb{R}^2$ 上の円を S と表し, $(\mathbb{R}^2, \mathscr{O})$ の部分位相空間とする. すなわち $S = (S, \mathscr{O}_S)$ とするとき, $\mathscr{O}_S$ に属する開集合とはどんな図形であるか考えよう. ただし, ここで円 S は, 内部を含めない境界線だけの図形とする.

解　S の開集合は, 下図のように, ある開集合 $A \in \mathscr{O}$ との共通部分 $S \cap A$（円弧の一部で図の太い部分）である.



または



など　//

【定義 2.8】 位相空間 $X = (X, \mathscr{A})$ の部分集合 W に対して

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset W \qquad U_\alpha \in \mathscr{A} \qquad \text{（A は加算集合であるとは限らない）}$$

となるとき, 集合族 $\mathscr{U}=\left\{U_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ は W を**被覆** *cover* するという. 部分集合 W が**コンパクト** *compact* であるとは, 任意の被覆 $\mathscr{U}=\left\{U_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ に対して, $\mathscr{U}$ から有限個の $U'_1,U'_2,\cdots,U'_m$ を選びとって, W を被覆できること, すなわち $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{m}U'_k\supset W$ とできることをいう. このとき $\left\{U'_1,U'_2,\cdots,U'_m\right\}$ を $\mathscr{U}$ の**有限部分被覆**という.

例 2.9 $\mathbb{R}^1$ において, 開区間 $(0,1)$ はコンパクトでない.

$\boxed{\text{解}}$ $I=(0,1)$ とおく. たとえば開集合

$$U_n=\left\{\ x\in\mathbb{R}\ \middle|\ \frac{1}{n+1}<x<\frac{n+1}{2n}\ \right\}\qquad n=1,2,3,\cdots$$

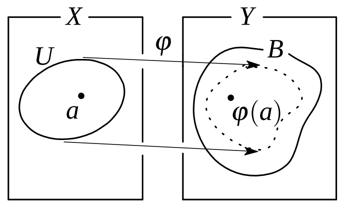
を考えると $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n\supset I$ であるが, $U_1,U_2,U_3,\cdots$ の中から有限個の U_n をどのように選んでとっても, I を被覆できないからである. //

例 2.10 $\mathbb{R}^1$ において, 閉区間 $[a,b]$ はコンパクトである. その証明は「コンパクトでないと仮定するとカントールの区間縮小法の原理を用いて矛盾が生じる」ことで得られるが省略する.

☞ 一般に $\mathbb{R}^n$ において, 有界な閉集合であることとコンパクトであることは同値であり, **ハイネ・ボレルの被覆定理**と呼ばれている.

一般に, 2 つの集合 X,Y があり, 一つの点 $a\in X$ に対して一つの点 $b\in Y$ が対応しているとき, その対応を**写像** *mapping* という. 写像を φ と表すとき, その対応関係を $\varphi:X\to Y$ と表し, また $\varphi(a)=b$ と表す.

関数の連続性は近傍を使って定義されているが, 位相空間では近傍のかわりに開集合を使うので書き直してみよう. §2.1 の式★ 3 の続きである. 位相空間 $(X,\mathscr{A})$ と $(Y,\mathscr{B})$ の間に写像 $\varphi:X\to Y$ があるとすると, 点 $a\in X$ において φ が連続であるためには,



$$\forall B\in\mathscr{B}\left\{\ \varphi(a)\in B\ \right\},\ \exists U\in\mathscr{A}\left\{\ a\in U,\ \ \varphi(U)\subset B\ \right\}$$

でなければならない. ここで $\varphi^{-1}(B)=\left\{\ x\in X\mid\varphi(x)\in B\ \right\}$ とおくと, 点 a が $\varphi^{-1}(B)$ の内点であることを求めている. 各点における連続性を空間全体で考えると, Y の任意の開集合 $B\in\mathscr{B}$ に対して原像 $\varphi^{-1}(B)$ が X の開集合であることが求められていることになる.

☞ ここで φ^{-1} は逆写像のことではなく, $\varphi^{-1}(B)$ は単に集合 B の原像のこととする. 逆写像についてはあとで考える.

ここまで来て, ようやく距離という絶対的な物差しから自由になり, 位相空間の写像 $\varphi:X\to Y$ が連続であることの定義に到達できた.

【定義 2.9】 位相空間 $X=(X,\mathscr{A})$ から位相空間 $Y=(Y,\mathscr{B})$ への写像 $\varphi:X\to Y$ が**連続**であるとは

$$\forall B\in\mathscr{B},\ \ \varphi^{-1}(B)\in\mathscr{A}$$

が成り立つことをいう.

例 2.11 位相空間 $X=(X,\mathscr{A})$ と $Y=(Y,\mathscr{B})$ が次のようにあるとする.

$$X=\left\{\ 1,2,3,4\ \right\},\quad \mathscr{A}=\left\{\ \emptyset,X,\{1\},\{2,3\},\{1,4\},\{1,2,3\}\ \right\}$$
$$Y=\left\{\ a,b,c\ \right\},\quad \mathscr{B}=\left\{\ \emptyset,Y,\{a\},\{b,c\}\ \right\}$$

(1) 写像 $\varphi:X\to Y$ を

$$\varphi(1)=a,\quad \varphi(2)=b,\quad \varphi(3)=c,\quad \varphi(4)=a$$

と定めると, φ は連続である. なぜなら, Y のすべての開集合について調べると

$$\varphi^{-1}(\{a\}) = \{1,4\} \in \mathscr{A}, \quad \varphi^{-1}(\{b,c\}) = \{2,3\} \in \mathscr{A}, \quad \varphi^{-1}(Y) = X \in \mathscr{A}$$

となるからである.

(2) 写像 $\psi : X \to Y$ を

$$\psi(1) = b, \quad \psi(2) = a, \quad \psi(3) = c, \quad \psi(4) = a$$

と定めと, ψ は連続でない. なぜなら, $\psi^{-1}(\{a\}) = \{2,4\} \notin \mathscr{A}$ だからである. //

☞ 連続であることを示すにはすべての開集合について調べなければならないのに対して, 連続でないことを示すには反例を一つあげればよい. また空集合 $\emptyset$ に対しては常に $\varphi(\emptyset) = \emptyset$, $\varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ とする.

問 2.7　X は例 2.11 の位相空間とし, Y は

$$Y = \{\ a,b,c\ \}, \quad \mathscr{B} = \{\ \emptyset, Y, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\ \}$$

として写像 $\varphi : X \to Y$ を考えるとき, 連続なものと連続でないものを例示せよ.

問 2.8　連続写像 $\varphi : X \to Y$ と $\psi : Y \to Z$ があるとき, 写像 $\Phi : X \to Z$ を $\Phi(x) = \psi(\varphi(x))$ と定めるならば, Φ も連続であることを証明せよ.

§2.3　位相同型

【定義 2.10】写像 $\varphi : A \to B$ について,

$$\forall a,b \in A \text{ に対して} \quad a \neq b \ \Rightarrow\ \varphi(a) \neq \varphi(b)$$

が成り立つとき, φ を**単射** *injection* または**１対１** *one to one* の写像という. 一般に $\varphi(A) \subset B$ であるが, 特に $\varphi(A) = B$ のとき φ を**全射** *surjection* または**上への**写像 *onto mapping* という. さらに単射であり, かつ全射であるものを**全単射** *bijection* という.

写像 $\varphi : X \to Y$ が全単射ならば, $\varphi(x) \in Y$ に対して $x \in X$ を対応させる写像が得られる. これを**逆写像**といい $\varphi^{-1} : Y \to X$ と表す.

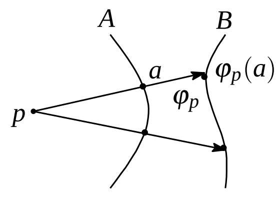
【定義 2.11】位相空間 $X = (X, \mathscr{A}), Y = (Y, \mathscr{B})$ に対して, 次の条件を満たす写像 $\varphi : X \to Y$ があるとき, X と Y は**位相同型**または**同相** *homeomorphic* といい, $X \approx Y$ と表す. このとき φ を**同相写像** *homeomorphism* という.

H1 :　φ は連続な全単射

H2 :　逆写像 $\varphi^{-1} : Y \to X$ も連続

同相関係を $X \cong Y$ または $X \sim Y$ と表す本もあるが, このテキストでは $X \approx Y$ と表す.

【定義 2.12】$\mathbb{R}^2$ 上の曲線 A, B があるとき, 定点 p をとり, 右図のように基点 p から放射線状に点を対応させる写像 $\varphi_p : A \to B$ を**ステレオグラフ射影** *stereographic projection* または簡単に**ステレオ射影**という.



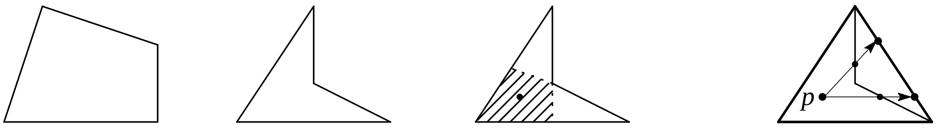
曲線を $(\mathbb{R}^2, \mathscr{O})$ の部分空間と考えるとき, 例 2.8 で考えたように, その開集合は曲線上のいくつかの開区間から成るものだからステレオ射影は連続である. さらに次の重要なことがわかる.

〘**定理 2.2**〙 全単射なステレオ射影は同相写像である.

ステレオ射影は, 曲線を「曲げたり, 伸ばしたり, 縮めたりする操作」を考えるとき, 重要な役割をはたす. また, 3次元空間内においても同様にステレオ射影を考えることができる.

例 2.12 A, B はともに円周とし, B の内部に A があるとする. A の内部に基点 p をとると, ステレオ射影 $\varphi_p : A \to B$ は連続な全単射であり, したがって $A \approx B$ である.
A が任意の三角形の場合でも, A の内部に基点 p をとって考えると, $A \approx B$ であることが分かる.

A が4つ以上の頂点をもつ多角形の場合に同様のことを考えるときは注意が必要である. たとえば四角形の場合, 下図 (1) のように凸の形（すべての頂点の内角が 180° 未満）ならば, 例 2.12 と同様に連続な全単射 $\varphi : A \to B$ を考えることができるが, 下図 (2) のように凸でない場合には基点 p の位置は限定される. 図 (3) のように基点を斜線部内にとらなければ1対1にならないからである.



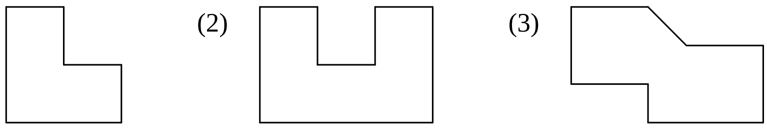
(1) 凸の場合　(2) 凸でない場合　(3) 基点の位置　(4) 凸多角形へステレオ射影

さらに, 内角が 180° を超える頂点が複数個あるような多角形の場合には, 凹んだ部分を解消するステレオ射影をいくつか繰り返し考え, それらを合成すればよい. したがって, A は任意の n 角形, B は円周とするとき, 連続な全単射 $\varphi : A \to B$ があることがわかり, 次の結果が得られる.

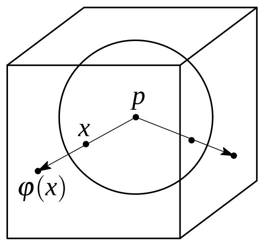
〖**定理 2.3**〗 平面上の任意の多角形は円周と同相である.

問 2.9 A は下図のような図形とし, B は円周とする. 連続な全単射 $\varphi : A \to B$ があることを示せ.

(1)　(2)　(3)

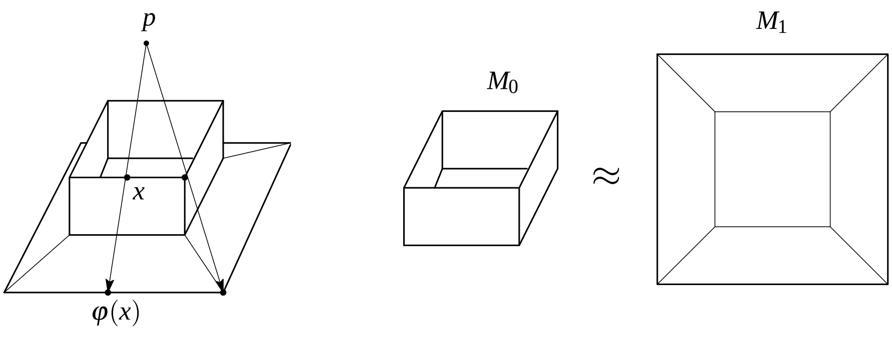


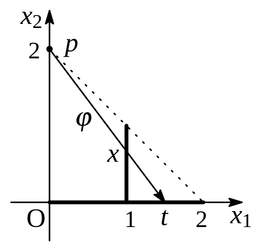
これは $\mathbb{R}^2$ 内の図形だけでなく, $\mathbb{R}^3$ 内の図形についても同様であり, 有限個の面からなる任意の多面体 M は球面と同相である. また, 多面体の面は平面でなく曲面になっているような立体でも同様である.



例 2.13 $\mathbb{R}^3$ 内の球面と6面体は同相である. 右図のように, 球面上の点 x に対して6面体上の点 $\varphi(x)$ を対応させる全単射なステレオ射影 φ を考えることができるからである.

さらに $\mathbb{R}^3$ 内の図形と $\mathbb{R}^2$ 内の図形の間についても, 定理 2.2 は通用する. たとえば, 下図左のようなステレオ射影 $\varphi : M_0 \to M_1$ を考えるとき, 基点 p の位置を適当にとることで全単射とすることができ, $M_0 \approx M_1$ となる. このようにして, 立体的な図形 M_0 に関する問題を平面的な図形 M_1 の問題におきかえて考えることができるメリットは大きい.



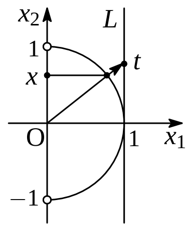


問 2.10　M_0 と M_1 は $\mathbb{R}^2$ 上の部分空間で $M_0 = I_1 \cup I_2$ であり,

$$I_1 = \left\{ (x_1, 0) \,\middle|\, 0 \le x_1 \le 1 \right\}, \quad I_2 = \left\{ (1, x_2) \,\middle|\, 0 \le x_2 \le 1 \right\}$$

また $M_1 = \left\{ (x_1, 0) \,\middle|\, 0 \le x_1 \le 2 \right\}$ とする. 点 $p(0,2)$ を基点とするステレオ射影 $\varphi : M_0 \to M_1$ を考え, $x(x_1, x_2) \in M_0$ に対して $t = \varphi(x) \in M_1$ とおくとき, $\varphi(x) \in M_1$ の式を求めよ. φ は全単射であり, $M_0 \approx M_1$ となる.

例 2.14　開区間 $I = (-1, 1)$ は 1 次元空間 $\mathbb{R}^1$ と同相である.



解　まず区間 I を右図のように x_2 軸上にとり, $\mathbb{R}^1$ は直線 L とする. 点 $x \in I$ に対して, 直線 $x_2 = x$ と単位半円との交点をとり, 右図のように原点を基点とするステレオ射影 φ を考えると, φ は全単射なので, $I \approx \mathbb{R}^1$ となる. 具体的に式で示すと

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \varphi^{-1}(t) = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

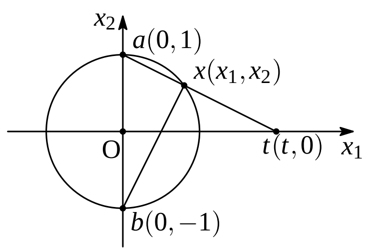
と書くことができる.

問 2.11　上の解をきちんと確かめよ.

例 2.15　2 次元空間 $\mathbb{R}^2$ で単位円周 $S^1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 \right\}$ を考え, a は S^1 上の 1 点とするとき, $S^1 \setminus \{a\} \approx \mathbb{R}$ である.

解　右図のように S^1 上の点 $a(0,1)$ を基点とするステレオ射影 $\varphi : S^1 \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ を, 2 点 a と $x \in S^1 \setminus \{a\}$ を通る直線が x_1 軸と交わる座標を $\varphi(x) = t$ と定めると φ は全単射であり, 以下のように $\varphi(x)$ と $\varphi^{-1}(t)$ が連続な関数式で表すことができる.

　相似な三角形 axb と $a\mathrm{O}t$ の辺の比 $at : \mathrm{O}a = ab : ax$ より, $at : 1 = 2 : ax$ である. すなわち $at \cdot ax = 2$ であり, この関係式が鍵となる.



$$\overrightarrow{at} = \frac{at}{ax}\,\overrightarrow{ax} = \frac{at \cdot ax}{ax^2}\,\overrightarrow{ax} = \frac{2}{ax^2}\,\overrightarrow{ax}$$

となり, ベクトルの成分で表すと

$$\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{{x_1}^2 + (x_2 - 1)^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

ここから $t = \dfrac{x_1}{1 - x_2}$ が得られる.

逆写像は, $\overrightarrow{ax} = \dfrac{ax}{at}\,\overrightarrow{at} = \dfrac{ax \cdot at}{at^2}\,\overrightarrow{at} = \dfrac{2}{at^2}\,\overrightarrow{at}$ より $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = \dfrac{2}{t^2 + 1} \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$ だから $x_1 = \dfrac{2t}{t^2 + 1}$

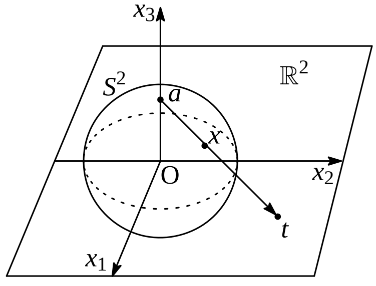
また $x_2 - 1 = \dfrac{-2}{t^2 + 1}$ より $x_2 = \dfrac{-2}{t^2 + 1} + 1 = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ となる.　//

☞ 数直線 $\mathbb{R}$ 上の任意の開区間 I について, $I \approx S^1 \setminus \{a\}$ だから $I \approx \mathbb{R}$ であることが例 2.14 とは別の方法で示すことができる.

問 2.12　3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ で単位球面を S^2 とおく. すなわち

$$S^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1 \right\}$$

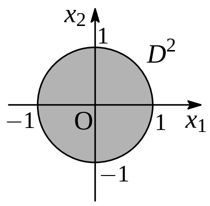
である. S^2 上の 1 点 $a(0,0,1)$ をとり, 上の例 2.15 と同様に図のようなスレレオ射影 $\varphi : S^2 \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^2$ を考えると以下の関係式が得られ, $S^2 \setminus \{a\} \approx \mathbb{R}^2$ であることを確かめよ.



(1)　$t_1 = \dfrac{x_1}{1 - x_3}, \quad t_2 = \dfrac{x_2}{1 - x_3}$

(2)　$x_1 = \dfrac{2t_1}{{t_1}^2 + {t_2}^2 + 1}, \quad x_2 = \dfrac{2t_2}{{t_1}^2 + {t_2}^2 + 1}, \quad x_3 = \dfrac{{t_1}^2 + {t_2}^2 - 1}{{t_1}^2 + {t_2}^2 + 1}$

境界線だけの図形でなく, その内部を含めた図形についてもステレオ射影を用いた位相同型の議論が通用することを考えよう. その準備として右図の集合



$$D^2 = \{\ x \in \mathbb{R}^2 \ \big|\ (x_1)^2 + (x_2)^2 \leq 1\ \}$$

を**単位円盤**といい, 単位円盤から境界を除いた部分

$$D_o^2 = \{\ x \in \mathbb{R}^2 \ \big|\ (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1\ \}$$

を**単位開円盤**ということにしよう.

〖**定理 2.4**〗 任意の実数 $r > 0$ に対して, 原点を中心とし半径 r の円盤を $\overline{B_r}$ とし, また境界を除いた内部を B_r とするとき次の関係が成り立つ.

(1) $\overline{B_r} \approx D^2$ (2) $B_r \approx D_o^2 \approx \mathbb{R}^2$

証明 (1) 点 $x\,(x_1, x_2)$ に対して $rx\,(rx_1, rx_2)$ とするとき, 写像 $\varphi : D^2 \to \overline{B_r}$ を

$$\varphi(x) = rx \qquad \forall x \in D^2$$

と定めれば, φ は連続な全単射であり, 同相写像になるからである.
(2) 任意の $x \in B_r$ に対して $s = \dfrac{r}{r - d(x,0)}$ とおくとき $1 \leq s < \infty$ であり,

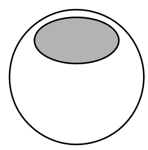
$$x \to 0 \ \Rightarrow\ s \to 1 \quad \text{また} \quad d(x,0) \to r \ \Rightarrow\ s \to \infty$$

である. 写像 $\varphi : B_r \to \mathbb{R}^2$ を $\varphi(x) = sx = \dfrac{rx}{r - d(x,0)}$ と定める.

逆に任意の $y \in \mathbb{R}^2$ に対して写像 $\psi : \mathbb{R}^2 \to B_r$ を $\psi(y) = \dfrac{ry}{r + d(y,0)}$ と定めると, $\psi(\varphi(x)) = x$ となり, φ は同相写像である. //

☞ この定理 2.4 の写像 φ または ψ はそのまま一般に n 次元で使うことができる.

問 2.13 上の証明をきちんと確かめよ.



問 2.14 球面の一部を右図のようにカットした曲面を M とすると, $M \approx D^2$ であることを説明せよ.

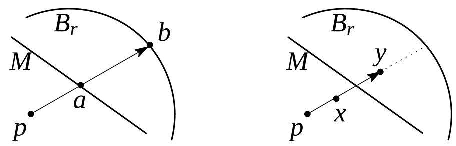
定理 2.4 の (1) の考え方を応用すると, 定理 2.3 の拡張が次のように得られる.

〖**定理 2.5**〗 $\mathbb{R}^2$ 上で, 有限個の辺から成る任意の多角形 M に対して, その内部も含めて $M \approx D^2$ である.

証明 M を内部に含む適当な大きさの円盤 B_r をとり, 下図のようなステレオ射影を考える. M の境界上の点 a が B_r の境界上の点 b に対応されるとき, M の内部にある点 x を, 線分の長さの比が

$$pa : px = pb : py$$

となるように, B_r の内部の点 y に対応される写像 $\varphi : M \to B_r$ を考え, $\varphi(x) = y$ と定める. すると φ は同相写像となり, $M \approx B_r \approx D^2$ である.



ただし, M が凸多角形でない場合は基点 p を適当にとりながら, いくつかのステレオ射影を繰り返して考えればよい. //