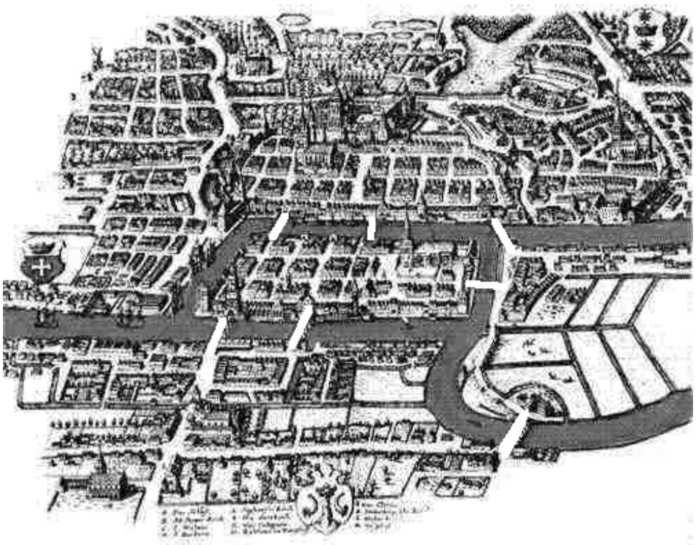
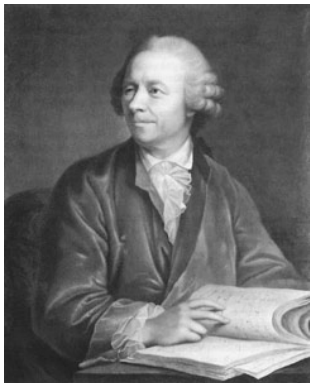
第1章　オイラーの業績

幾何学の分野の一つに位相幾何学（トポロジー topology）と呼ばれているものがある. 図形を連続的に伸ばしたり縮めたり曲げたりしても変らない性質を調べる分野であるが, このような考えは 18 世紀の数学者オイラーの画期的な仕事から生まれた.

§1.1　ケーニヒスベルグの橋の問題

位相幾何学は英語でトポロジー topology といい, ギリシア語のトポス（位置 topos）とロゴス（学問 logos）という言葉に由来する. それは距離という考え方にとらわれず, **点**の位置関係を考え, 同じ位置関係をもつ図形が共通に持っている性質（それを**位相不変量**という）を調べる幾何学である. このようなまったく新しい数学の分野の先駆者はオイラー（Leonhard Euler, 1707.4.15〜1783.9.18）であり, 1736 年の論文「位置の幾何学に関する問題の解決」が出発点である. 当時, ケーニヒスベルグという町で話題になっていた「ケーニヒスベルグの橋の問題＝ある地点から出発して７つの橋を一度だけ必ず渡って元の地点に戻ることができるか」が発端となっている.

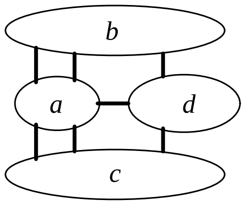




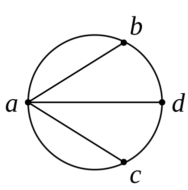
この問題に対してオイラーは,「点と, それらの点を結ぶ線の位置関係がこの問題の本質である. 橋と橋の間の距離は重要でなく, また, 進む道がまっすぐであるか曲がっているかも重要でなく, 点と線だけの簡略化した図形について, **一筆書き可能**かどうかが問題である」と考えた.

そうすると, 右図 (1) のように川で隔てられた４つの地区の大きさは必要でないので, それぞれ点 a, b, c, d とし, それらが７本の線で結ばれている (2) のような図が考えられる. その点と線から成る図から, ７つの線（矢印→）と８つの点（○数字）の列 ①→②→③→④→⑤→⑥→⑦→⑧ が作れるかどうかという問題になる.

(1)

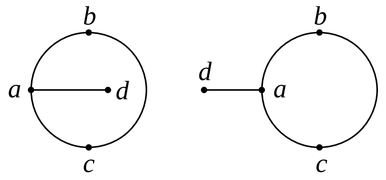


(2)



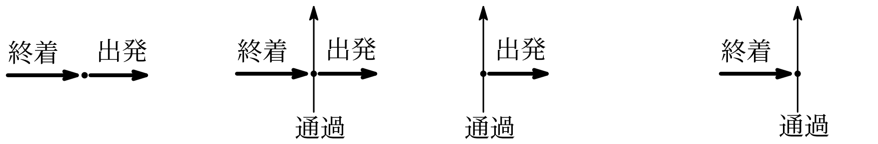
議論の前に用語を定義しておこう．まず, 点を**頂点**, 線を**辺**と呼ぶことにする. 辺は必ず頂点と頂点を結ぶものとし, 辺と辺が重なるところには必ず頂点があるとする.

なお, 一筆書き可能かどうかを考えるとき, 右図の 2 つはまったく同じものである.



【**定義 1.1**】平面 $\mathbb{R}^2$ 上の（または空間 $\mathbb{R}^3$ 内の）図形で, 有限個の頂点と辺からなる図形を**グラフ**という. 辺は互いに重ならず, 直線でも曲線でもよいとする. 任意の 2 頂点を結ぶ辺があるとき, そのグラフは**連結**であるという. 各頂点について, その点を端点とする辺の数が偶数のとき, その頂点を**偶点**といい, 奇数のときは**奇点**という.

偶点と奇点の違いを考えると, 次の図のようになることがわかる. 通過する辺がもっと多くあっても, 偶点か奇点かということには変わりない.



(1) 偶点　通過辺なし　(2) 偶点　通過辺あり　(3) 奇点　ここから出発　(4) 奇点　ここに終着

一筆書き可能なグラフは, まず連結でなければならず, 次に出発点と終着点はそれぞれ 1 つずつでなければならない. 偶点はいくつあってもよいが, 奇点が 3 つ以上ある場合や奇点が一つだけの場合は一筆書き不可能であることがわかる. 詳しい証明は省略するが, オイラーが示した結論は次の定理である.

〖**定理 1.1**〗 グラフが一筆書き可能であるための必要十分条件は「連結」かつ「奇点の個数が 0 または 2」であることである.

一筆書き可能なグラフがあるとき, 実際に一筆書きの経路を示すには, もし偶点ばかりならば, どの点から出発してもよく, ほかの点はすべて通過点となり, 最後に出発点に戻ることで完了する. 2 つの奇点がある場合には, 一方の奇点から出発し, 他方の奇点に終着するように道をたどればよい.

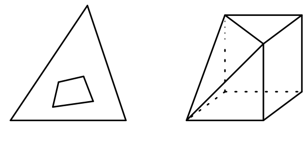
ケーニヒスベルグの橋の問題では, それをグラフ化した図を見ると, 連結であるが, 偶点はなく, 奇点が 4 つあるので, この定理により一筆書き不可能である.

§1.2　オイラーの多面体定理

空間 $\mathbb{R}^3$ 内の図形で 4 つ以上の面（平面の一部）をもち, 各頂点を結ぶ辺（直線の一部）があり, どの面もそれらの辺に囲まれているような立体を**多面体**という. 頂点の数, 辺の数, 面の数はどれも有限個とする. また, 右図 (1) のように穴があいた面はないとする.

これから第 4 章まで, 多面体の頂点の数を v, 辺の数を e, 面の数を f と表すことにする. たとえば右図 (2) は $v=7,\ e=12,\ f=7$ の 7 面体である.

(1)　(2)

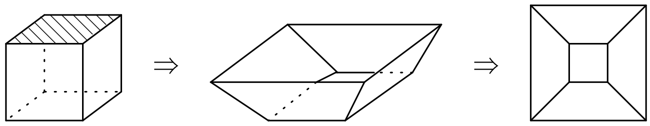


〖**定理 1.2**〗 **オイラーの多面体公式**（*Euler polyhedral formula*） 任意の多面体に対して, 等式 $v-e+f=2$ が成り立つ.

証明 多面体を M とおく. 以下の 4 段階に分けて証明する.

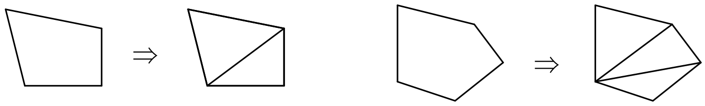
<u>第 1 段階</u>　M の一つの面を除くと穴のあいた立体になるが, それを M_0 とおく. 穴のあいた面を広げて平面的な図形にし, それを M_1 とおく. M_0 と M_1 の間で v, e, f の個数とそれらの位置関係に変化はないので, M_1 について等式 $v-e+f=1$ を示せばよい.

具体的にたとえば６面体で説明すると, どこか一つの面（斜線部分）を取り除き, 残りの面・辺・頂点のつながり関係を保つように広げて, 平面的な図形にしたものを M_1 とする. この図形で関係式 $v-e+f=1$ が成り立っていることを示そうというのである.

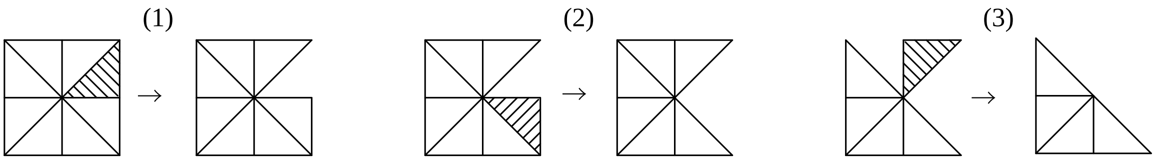


M_0 M_1

第２段階　各面の形がさまざまであると面倒なのですべての面を三角形に分割する. 下図のように三角分割すると, 頂点の数は変わらず, 辺の数と面の数が増えるが, それらが増える数は同じなので, 証明すべき等式 $v-e+f=1$ は変わらない.



第３段階　複雑に三角分割された平面図形に対して, グラフの連結性を保ちながら, 外側から三角形を１つずつ消していく. このとき以下の３つの場合が考えられるが, どの場合も $v-e+f$ の値は変わらない.
(1) その三角形が外部と１辺で接している場合, 面の数と辺の数が１つ減る.
(2) その三角形が外部と２辺で接している場合, 面の数が１つ減るが, 同時に頂点も１つ減り, 辺は２つ減る.
(3) その三角形が外部と３辺で接している場合, 面の数が１つ減るが, 同時に頂点は２つ減り, 辺は３つ減る.



第４段階　最後に一つの三角形だけになり, $v-e+f=3-3+1=1$ が得られる.　//

☞ オイラーの多面体公式は, 彼の手紙（1750 年）に書かれていたのが歴史上最初であるという. さらに彼は 1752 年に不完全ながらその証明（多面体を４面体に分割する方法で）を発表した. ただし, デカルト（René Descartes, 1596-1650）やライプニッツ（Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz, 1646-1716）など, 17〜18 世紀に活躍した著名な数学者たちも知っていたという説もある. その後, スイスのリュイリエール（Simon Antoine Jean L'Huilier, 1750-1840）という数学者がオイラーの多面体公式を完全な形で証明し, また, 穴のあいた多面体ではその公式は成立しないことを示した (1813 年) といわれている.

【定義 1.2】次の条件を満たす凸多面体を**正多面体** *regular polyhedron* という.

(1) すべての面は合同な正多角形である.

(2) どの頂点に集まる辺の数は等しい.

〖**定理 1.3**〗正多面体は正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体, 正二十面体の５種類しかない.

証明 M は各面が正 m 角形の正多面体とし, その頂点・辺・面の数はそれぞれ v, e, f とする. ただし m は３以上の自然数である.

各面は m 個の辺をもつので, 全体で辺の数は mf 個になるが, １つの辺は２つの面に共有されているので

$$mf=2e \quad \text{すなわち} \quad f=\frac{2e}{m} \quad \cdots①$$

という関係がある. 各頂点に集まる辺の数を n（n も３以上の自然数）とすると, 全体で辺の数は nv 個になるが, １つの辺は２つの頂点を結んでいるので

$$nv=2e \quad \text{すなわち} \quad v=\frac{2e}{n} \quad \cdots②$$

という関係がある．オイラーの公式 $v-e+f=2$ に①と②を代入すると

$$\frac{2e}{n}-e+\frac{2e}{m}=2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{2}{n}+\frac{2}{m}-1=\frac{2}{e}$$

ここで $\frac{2}{e}>0$ だから $\frac{2}{n}+\frac{2}{m}-1>0$ であり，

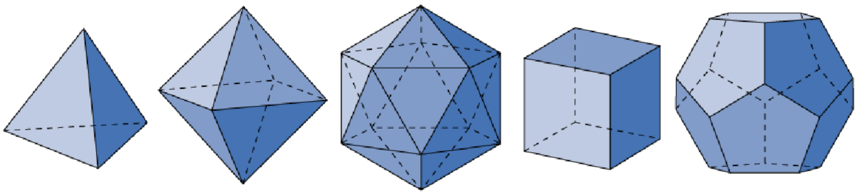
$$2m+2n-mn>0 \quad \text{より} \quad (m-2)(n-2)<4$$

この関係式を満たす (m,n) の組を考えると

$$(3,3),\quad (3,4),\quad (3,5),\quad (4,3),\quad (5,3)$$

だけであることがわかる．　//

	名称	v	e	f
$(3,3)$	正４面体	4	6	4
$(4,3)$	正６面体	8	12	6
$(3,4)$	正８面体	6	12	8
$(5,3)$	正１２面体	20	30	12
$(3,5)$	正２０面体	12	30	20



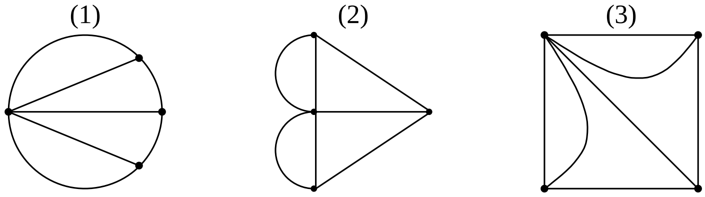
正４面体 *regular tetrahedron*　正８面体 *regular octahedron*　正２０面体 *regular icosahedron*　正６面体 *regular hexahedron*　正１２面体 *regular dodecahedron*

☞ 歴史的に, 正多面体が上の５種類しかないことを最初に書きしるしたのはプラトン（Plato, BC 428 頃〜BC 348 頃）であるといわれ, そのため正多面体を別名**プラトンの立体** *Platonic solid* ともいう．また, その立体が５種類しかないことの証明は, 紀元前３世紀頃に編纂されたユークリッド原論に書かれている．ただし, それは上の証明とは違うものである．

§1.3　連続的な変形と同一視

　一筆書きの問題とオイラーの多面体公式を議論するとき, **連続性** *continuity* という重要な考え方が使われている．頂点と頂点がどのくらい離れているか, または頂点と頂点が直線で結ばれているのか, それとも曲線で結ばれているのかは問題でなく, それぞれの頂点の位置関係が保たれるならば, その間の辺を適当に引き伸ばしたり, 縮めたり, 曲げたりしてもよいという考えである．
　たとえばケーニヒスブルグの橋の問題で考えた下図 (1) は (2) または (3) と頂点, 辺, 面の位置関係が同じであり, 互いに連続的に変形して得られる．

(1)　(2)　(3)



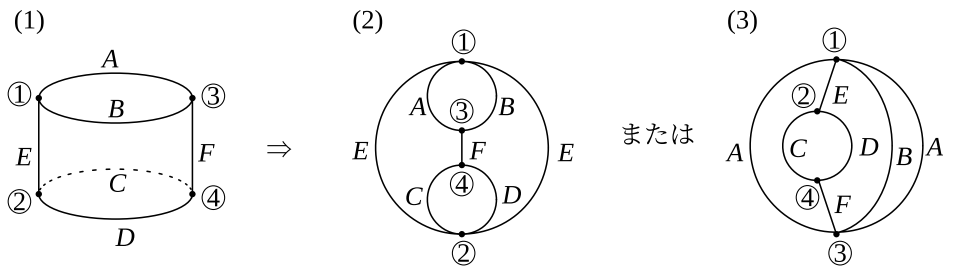
　この連続性については第２章で詳しく議論しよう

　次に, 立体的な図形を考えるとき, それを平面的な図形に置き換えると分かりやすくなる．そのためには, 立体的な図形をある部分で切り開いて見ることがどうしても必要になる．このとき**同一視** *identification* というもう一つの重要な考え方が使われる．たとえば世界地図を例にしてみよう．

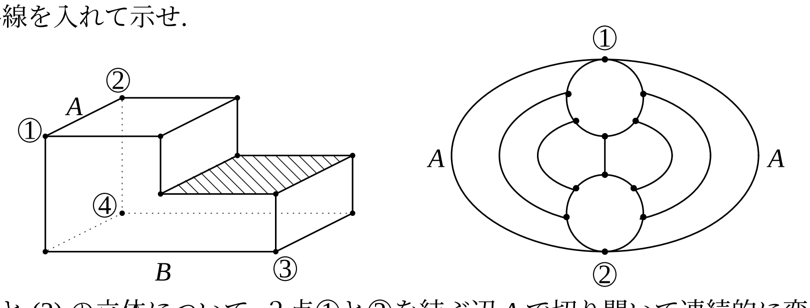
左右の端（辺 ab）は境界（世界の終り）ではなく,「やむを得ず切り離している」が「つながっている」ものと我々は理解している. すなわち, 左右の辺 ab を**同一視**するのである. あるいは辺を**貼り合せる**と表現することもできる.

この同一視という考え方については第３章で詳しく議論するが, 以下ここで「立体的な図形の一部を切り離し, 連続的な変形により平面的な図形にして見る」練習を少ししておこう.

例 1.1 下図 (1) の円柱面について, 頂点を ①,②,$\cdots$ と表し, 辺を $A,B,C,\cdots$ とする. その立体を辺 E で切り開いて各頂点と辺の位置関係を保持しながら連続的に平面上に展開すると, 図 (2) のようになる. また, 辺 A で切り開いて同様に考えると, 図 (3) のようになる.



問 1.1 下図左の立体がある. 辺 A を同一視し, 連続的な変形をすることで下図右のような平面上の図形になる. 下図左における辺 B, 頂点③, ④は下図右ではどこにあるか記入せよ. また斜線で示した面は下図右ではどこにあるか斜線を入れて示せ.



問 1.2 下図 (1) と (2) の立体について, ２点①と②を結ぶ辺 A で切り開いて連続的に変形した図 (3) をそれぞれ示せ. 斜線部に相当する面には同様に斜線を入れて示すこと.