# 第９章の略解・ヒント

以下, 解答を簡単に示すので, 各自きちんと計算過程を説明できるようにすること．もし解答に計算間違いがあれば知らせてください．

**問 2**　(1) $r = \dfrac{17\sqrt{17}}{2}$, $k = \dfrac{-2}{17\sqrt{17}}$　(2) 曲率中心 C$(2, 2)$　$r = \sqrt{2}$　$k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
(3) $k = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$　分母は有理化してもしなくてもよい

**問 4**　$k = -2(4x+1)^{-3/2}$　頂点なし

**問 5**　$k = 6ax(1+9a^2x^4)^{-3/2}$ であり, $k' = 6a\left(1 - 3\sqrt{5}\,ax^2\right)\left(1 + 3\sqrt{5}\,ax^2\right)(1+9a^2x^4)^{-5/2}$ だから $k' = 0 \Leftrightarrow 1 - 3\sqrt{5}\,ax^2 = 0$ より実数解は２つある．その前後で $k$ の増減を調べよ．

**問 6**　$D = 1 + \sin^2 x$ とおくとき, $k = -\cos x\, D^{-3/2}$ であり, $k' = 2\sin x\, D^{-3/2}$ より頂点の座標は $(\pi, -1)$ となる．

**問 8**　$t = 0$ のとき $\mathbb{X}' = \mathbb{O}$ となるから区分的に正則である．

**問 10**　(1) 曲線 $C_1$ を $x$ 軸方向に $a$ また $y$ 軸方向に $b$ だけ平行移動した曲線を $C_2$ とする．$C_1$ のベクトル表示を $\mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると $C_2$ のベクトル表示は $\mathbb{X}_2 = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$ であり, $\mathbb{X}_1' = \mathbb{X}_2'$ また $\mathbb{X}_1'' = \mathbb{X}_2''$ である．次に $C_1$ を原点のまわりに回転した曲線を $C_3$ とすると, $C_3$ のベクトル表示は $\mathbb{X}_3 = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx - dy \\ dx + cy \end{pmatrix}$ となる．ここで $c^2 + d^2 = 1$ であり, $|\mathbb{X}_1'| = |\mathbb{X}_3'|$ また $\begin{vmatrix} \mathbb{X}_3' & \mathbb{X}_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbb{X}_1' & \mathbb{X}_1'' \end{vmatrix}$ である．
(2) 曲線 $C_1$ を $x$ 軸に対称に移動した曲線を $C_4$ とするとそのベクトル表示は $\mathbb{X}_4 = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ であり, $|\mathbb{X}_1'| = |\mathbb{X}_4'|$ また $\begin{vmatrix} \mathbb{X}_4' & \mathbb{X}_4'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbb{X}_1' & \mathbb{X}_1'' \end{vmatrix}$ である．したがって $C_1$ の曲率を $k_1$ とすると $C_4$ の曲率は $-k_1$ となる．
(3) 平行移動しても曲率は変らないから, その直線は原点を通ると考えてよい．その直線を $L$ とする．曲線 $C_1$ を $L$ に対称に移動した曲線を $C_5$ とすると, それは次の３つの移動を順におこなったものと同じであるので, $C_5$ の曲率は $-k_1$ となる．
① $L$ を $x$ 軸に重なるように原点のまわりに角 $\theta$ だけ回転．曲率は変らない．
② $x$ 軸に対称に移動する．曲率は $-k_1$ になる．
③ 原点のまわりに角 $-\theta$ だけ回転．曲率は変らない．

**問 12**　どちらも曲率は $k = \dfrac{6}{13\sqrt{13}}$

**問 16**　(1) $k = 2x^{-3}(1+x^{-4})^{-3/2} = 2x^3(x^4+1)^{-3/2}$
$H = -\dfrac{6(x^4-1)}{x^8}$ より $H = 0$ のとき $x = \pm 1$ だから頂点は $(-1, -1)$ と $(1, 1)$
(2) $k = -x^{-2}(1+x^{-2})^{-3/2} = -x(x^2+1)^{-3/2}$
$H = \dfrac{2x^2-1}{x^5} = 0$ より $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　頂点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\log\sqrt{2}\right)$
(3) $k = -\sin x\left(1+\cos^2 x\right)^{-3/2}$　また $H = (\cos^2 x - 3)\cos x$ であり
$H = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ ゆえに頂点は $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ と $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$

**問 18** $r^2 = \cos 2\theta$ より $r\,r' = -\sin 2\theta$ また $(r')^2 = \left(\dfrac{-\sin 2\theta}{r}\right)^2 = \dfrac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}$ となる.
さらに $(r\,r')' = (r')^2 + r\,r'' = -2\cos 2\theta$ となる. 公式 3 を適用して曲率 $k$ を得る.

**問 19** $k = \dfrac{1}{a}\left(\cosh\dfrac{x}{a}\right)^{-2}$ であり $k' = -\dfrac{2}{a^2}\sinh\dfrac{x}{a}\left(\cosh\dfrac{x}{a}\right)^{-3}$
$k' = 0 \Leftrightarrow \sinh\dfrac{x}{a} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 　頂点は $(0, a)$

**問 20** $k' = \dfrac{-3\sqrt{a}\,\sin t}{2\sqrt{2}}(1+\cos t)^{-3/2}$ より $k' = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow t = 0, \pi$ 　頂点は $(2a, 0)$

**問 21** $k' = -\dfrac{2a\sqrt{3a}\,\cos 2t}{\sin^2 2t}$ より $k' = 0 \Leftrightarrow \cos 2t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$
頂点は 4 つ $\left(\pm\dfrac{a}{2\sqrt{2}}, \pm\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\right)$ ある.

**問 22** $k' = \dfrac{1}{4\sqrt{2}\,a}\sin t\,(1-\cos t)^{-3/2}$ であり, $0 < t < 2\pi$ のとき $k' = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow t = \pi$ より, 頂点は $(\pi a, 2a)$

**問 23** $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおいて確かめよ.

**問 24** $|\mathbb{X}|^2 = \mathbb{X}\cdot\mathbb{X}$ と前問を使う.

**問 25** (3) 次の 3 点 $(0, -1)$, $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2}\right)$

**問 29** (3) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{|\mathbb{X}'|}\right) = -\dfrac{1}{2}(\mathbb{X}'\cdot\mathbb{X}')^{-3/2}\dfrac{d}{dt}(\mathbb{X}'\cdot\mathbb{X}') = -\dfrac{1}{|\mathbb{X}'|^3}\mathbb{X}'\cdot\mathbb{X}''$

**問 30** (1) $\mathbb{X}' = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ b \end{pmatrix}, \mathbb{X}'' = \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -a\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ 　(2) $|\mathbb{X}'| = \sqrt{a^2+b^2}$
(3) $\mathbb{X}'\times\mathbb{X}'' = \begin{pmatrix} ab\sin t \\ -ab\cos t \\ a^2 \end{pmatrix}$ 　(4) $k = \dfrac{a}{a^2+b^2}$

**問 31** $s = \sqrt{a^2+b^2}\,t$, 単位接ベクトル $\mathbb{T}$ は問 34 の問題文にある.

**問 32** 平面の式を $z = ax + by + c$ とすると,

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ ax+by+c \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ ax'+by' \end{pmatrix}$$

となり, $\mathbb{X}''\times\mathbb{X}''' = \begin{pmatrix} ay''x''' - ax''y''' \\ -bx''y''' + by''x''' \\ x''y''' - y''x''' \end{pmatrix}$ より $\mathbb{X}'\cdot(\mathbb{X}''\times\mathbb{X}''') = 0$ を得る.