

7 フルネ・セレ座標系

定理 3 より $\mathbb{T}(s) \perp \mathbb{T}'(s)$ であり, また $|\mathbb{T}'(s)| = k$ だから

$$\mathbb{N}(s) = \frac{1}{k} \mathbb{T}'(s) = \frac{1}{k} \mathbb{X}''(s)$$

とおき, これを単位主法線ベクトル *unit normal vector* という. また,

$$\mathbb{B}(s) = \mathbb{T}(s) \times \mathbb{N}(s)$$

とおき, これを単位従法線ベクトル *unit binormal vector* という.

これにより, 曲線上の各点において正規直交基底

$$\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s), \mathbb{B}(s) \quad \text{この順に右手系}$$

が定められる. これをフルネ・セレ座標系またはフルネ・セレ標構 *Frenet-Serret frame* という. この座標軸の向きは曲線上の点の位置によってたえず変化するので, 動く座標系という意味で動座標系または動標構 *moving frame* という.

フルネ・セレ座標系で考えるとき, 曲率は

$$k = \mathbb{T}'(s) \cdot \mathbb{N}(s)$$

である. また

$$\tau = -\mathbb{B}'(s) \cdot \mathbb{N}(s)$$

を捩率 *torsion* という. 曲率 k とは接触平面上で曲線 C が曲がる変化の大きさを表す計量であり, 捩率 τ は曲線 C が接触平面から離れていこうとする変化の大きさを表すものである.

公式 12 弧長 s ではないパラメータ t で曲線 C がベクトル表示されているとき, $\mathbb{X} = \mathbb{X}(t)$ とすると, 上の事項は以下のようにまとめられる.

$$(1) \mathbb{T} = \frac{1}{|\mathbb{X}'|} \mathbb{X}'$$

$$(2) \mathbb{N} = \frac{1}{|\mathbb{X}' \times (\mathbb{X}'' \times \mathbb{X}')|} \mathbb{X}' \times (\mathbb{X}'' \times \mathbb{X}')$$

$$(3) \mathbb{B} = \mathbb{T} \times \mathbb{N} = \frac{1}{|\mathbb{X}' \times \mathbb{X}''|} \mathbb{X}' \times \mathbb{X}''$$

$$(4) k = \frac{|\mathbb{X}' \times \mathbb{X}''|}{|\mathbb{X}'|^3}$$

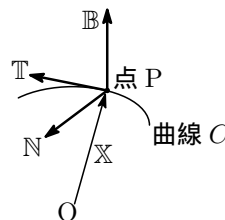
$$(5) \tau = \frac{\mathbb{X}' \cdot (\mathbb{X}'' \times \mathbb{X}''')}{|\mathbb{X}' \times \mathbb{X}''|^2} \quad \text{または} \quad \tau = \frac{|\mathbb{X}' \times \mathbb{X}'' \times \mathbb{X}'''|}{|\mathbb{X}' \times \mathbb{X}''|^2}$$

証明 (2) $\mathbb{T}(s) = \frac{1}{|\mathbb{X}'|} \mathbb{X}'$ を微分すると

$$\begin{aligned} \mathbb{T}' &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\mathbb{X}'|} \right) \mathbb{X}' + \frac{1}{|\mathbb{X}'|} \mathbb{X}'' = -\frac{\mathbb{X}' \cdot \mathbb{X}''}{|\mathbb{X}'|^3} \mathbb{X}' + \frac{1}{|\mathbb{X}'|} \mathbb{X}'' \\ &= \frac{1}{|\mathbb{X}'|^3} \{ -(\mathbb{X}' \cdot \mathbb{X}'') \mathbb{X}' + (\mathbb{X}' \cdot \mathbb{X}') \mathbb{X}'' \} = \frac{1}{|\mathbb{X}'|^3} \mathbb{X}' \times (\mathbb{X}'' \times \mathbb{X}') \end{aligned}$$

これを正規化して $\mathbb{N} = \frac{1}{|\mathbb{X}' \times (\mathbb{X}'' \times \mathbb{X}')|} \mathbb{X}' \times (\mathbb{X}'' \times \mathbb{X}')$ を得る.

(3) \mathbb{B} は \mathbb{X}' と \mathbb{X}'' で生成される接触平面の単位法線ベクトルだから.



(4) $\mathbb{X}' = |\mathbb{X}'| \mathbb{T}(s)$ を微分すると, $\frac{ds}{dt} = |\mathbb{X}'|$, $\mathbb{T}'(s) = k \mathbb{N}(s)$ より

$$\mathbb{X}' = \frac{d(|\mathbb{X}'|)}{dt} \mathbb{T}(s) + |\mathbb{X}'| \mathbb{T}'(s) \frac{ds}{dt} = \frac{d(|\mathbb{X}'|)}{dt} \mathbb{T}(s) + |\mathbb{X}'|^2 k \mathbb{N}(s)$$

したがって

$$\mathbb{X}' \times \mathbb{X}'' = |\mathbb{X}'| \mathbb{T}(s) \times \left(\frac{d(|\mathbb{X}'|)}{dt} \mathbb{T}(s) + |\mathbb{X}'|^2 k \mathbb{N}(s) \right) = |\mathbb{X}'|^3 k \mathbb{B}(s)$$

より $k = \frac{|\mathbb{X}' \times \mathbb{X}''|}{|\mathbb{X}'|^3}$ を得る.

(5) 簡単のために $G = |\mathbb{X}' \times \mathbb{X}''|$ とおくと, $\mathbb{B}(t) = \frac{1}{G} \mathbb{X}' \times \mathbb{X}''$ だから

$$\begin{aligned} \mathbb{B}'(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{G} \right) \mathbb{X}' \times \mathbb{X}'' + \frac{1}{G} (\mathbb{X}'' \times \mathbb{X}''' + \mathbb{X}' \times \mathbb{X}''') \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{G} \right) \mathbb{X}' \times \mathbb{X}'' + \frac{1}{G} \mathbb{X}' \times \mathbb{X}''' \end{aligned}$$

となり, $\mathbb{B}'(s) = \mathbb{B}'(t) \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\mathbb{X}'|} \mathbb{B}'(t)$ である. 他方

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \mathbb{B} \times \mathbb{T} = \frac{1}{G|\mathbb{X}'|} (\mathbb{X}' \times \mathbb{X}'') \times \mathbb{X}' \\ &= \frac{1}{G|\mathbb{X}'|} \{ (\mathbb{X}' \cdot \mathbb{X}') \mathbb{X}'' - (\mathbb{X}'' \cdot \mathbb{X}') \mathbb{X}' \} \\ &= \frac{|\mathbb{X}'|}{G} \mathbb{X}'' - \frac{\mathbb{X}'' \cdot \mathbb{X}'}{G|\mathbb{X}'|} \mathbb{X}' \end{aligned}$$

したがって, スカラー三重積を考えることにより

$$\tau = -\mathbb{B}'(s) \cdot \mathbb{N}(s) = -\frac{(\mathbb{X}' \times \mathbb{X}''') \cdot \mathbb{X}''}{G^2} = \frac{\mathbb{X}' \cdot (\mathbb{X}'' \times \mathbb{X}''')}{|\mathbb{X}' \times \mathbb{X}''|^2}$$

が得られる. //

例 27 平面 $z = 0$ 上の任意の曲線について, 常に撓率 $\tau = 0$ である.

解 $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathbb{X}'' \times \mathbb{X}''' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D \end{pmatrix} \quad \text{ただし } D = \begin{vmatrix} x'' & x''' \\ y'' & y''' \end{vmatrix}$$

であり, $\mathbb{X}' \cdot (\mathbb{X}'' \times \mathbb{X}''') = 0$ となるからである. //

座標平面上だけでなく, 曲線が \mathbb{R}^3 内の任意の平面上にあるとき, 常に撓率 $\tau = 0$ である. それを次の問で考えよう.

問 32 曲線が \mathbb{R}^3 内の平面 $ax + by + cz + d = 0$ 上にあるとき, 常に撓率 $\tau = 0$ であることを示せ.

定理 5 \mathbb{X} が平面曲線 $\Leftrightarrow \tau = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mathbb{X}' & \mathbb{X}'' & \mathbb{X}''' \end{vmatrix} = 0$

証明 略

例 28 次の 2 つの曲線について, $t = 0$ における曲率と撓率を比較しよう.

$$C_1 : \mathbb{X} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_2 : \mathbb{X} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

解 曲率はどちらも $k = 2$ である. 捩率は, C_1 では $\tau = 0$ であり, C_2 では $\tau = 3$ となる. //

問 33 上の例 28 の解をきちんと確かめよ.

問 34 つる巻き線に対して, 次の結果がられることを確かめよ.

$$\mathbb{T} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbb{N} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \sin t \\ -b \cos t \\ a \end{pmatrix}$$
$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

定理 6 (フルネ・セレの公式) 弧長 s をパラメータとすると, 次の関係式が成り立つ.

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbb{T} \\ \mathbb{N} \\ \mathbb{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{T} \\ \mathbb{N} \\ \mathbb{B} \end{pmatrix}$$

証明 $\mathbb{T}' = a\mathbb{T} + b\mathbb{N} + c\mathbb{B}$ とおくと,

$$\mathbb{T}' \cdot \mathbb{T} = 0, \quad \mathbb{T}' \cdot \mathbb{N} = k, \quad \mathbb{T}' \cdot \mathbb{B} = 0$$

より $a = 0, b = k, c = 0$ が得られるので, $\mathbb{T}' = k\mathbb{N}$ となる. ほかも同様である. //

以下の重要な定理が成り立つことが知られている.

定理 7 (空間曲線の基本定理) 実数 s ($a < s < b$) を変数とする連続関数 $k(s), \tau(s)$ (ただし $k(s) > 0$ とする) に対して「 s を弧長の媒介変数とする曲線で曲率が $k(s)$ かつ捩率が $\tau(s)$ であるもの」が一意的に存在する.

ただし, グラフの回転, 平行移動, 対称移動で重なる曲線は同一のものとする. この基本定理により, 空間内の曲線の形状はフルネ・セレの座標系と 2 つの計量, 曲率 k と捩率 τ で, 完全に特徴付けられる.