

## 5 フルネ標構

前節で、曲率はパラメータの取り方によらないその曲線が持つ固有の指標であることが分かった。その議論の中心的役割をはたすのは弧長パラメータであり、ほかのパラメータが  $x$ - $y$  座標軸との強い関係の下にあるのに対して、弧長パラメータはその曲線自体（たどってきた道筋）で定まるものである。さらに次の重要な定理が成り立つ。

定理 2 [平面曲線の基本定理]  $k(s)$  は微分可能な関数とするとき、この  $k(s)$  を曲率とする曲線が存在する。その曲線を  $C_1$  と  $C_2$  とするとき、回転と平行移動により  $C_1$  を  $C_2$  にぴったり重ねることができる。この意味で  $k(s)$  を曲率とする曲線が一意に存在すると言うことができる。

**証明**  $k(s)$  を曲率とする曲線が存在することを示す。

$$\theta(t) = \int_0^t k(u) du \text{ とおき}$$

$$x(s) = \int_0^s \cos \theta(t) dt, \quad y(s) = \int_0^s \sin \theta(t) dt$$

とすると、曲線  $C : \mathbb{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  を考えることができる。ここで

$$x'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^s \cos \theta(t) dt = \cos \theta(s), \quad y'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^s \sin \theta(t) dt = \sin \theta(s)$$

だから、常に  $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$  が成り立つので、弧長パラメータ表示された曲線であり、さらに

$$x'' = \frac{d}{ds} \cos \theta(s) = -\sin \theta(s) \cdot k(s), \quad y'' = \frac{d}{ds} \sin \theta(s) = \cos \theta(s) \cdot k(s)$$

により、 $\begin{vmatrix} \mathbb{X}' & \mathbb{X}'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = k(s)$  となるので、したがって求める曲線が得られたことになる。この定理の後半、存在の一意性についてはあとで示す。 //

**【注】** この定理は後述する空間曲線の基本定理（定理 7）*fundamental theorem of curves in space* を平面曲線に限定したものである。

次は問 24 で見たものであるが、重要であるのでもう一度とりあげておく。

定理 3  $|\mathbb{X}|$  が一定  $\Leftrightarrow \mathbb{X} \perp \mathbb{X}'$

問 28 上の定理を証明せよ。

$\mathbb{T}(s) = \mathbb{X}'(s)$  とおくと  $|\mathbb{T}(s)| = 1$  である。 $\mathbb{T}(s)$  を単位接ベクトル *unit tangent vector* という。

公式 8  $|\mathbb{T}'(s)| = |k|$  ( $k$  は曲率)

**証明** 項等的に  $|\mathbb{T}(s)| = 1$  なので  $\mathbb{T}(s) \perp \mathbb{T}'(s)$  である。 $\mathbb{T}(s) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  とおけば  $\mathbb{T}'(s) = c \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  となる。ただし  $c$  は 0 でない定数であり、また  $a^2 + b^2 = 1$  である。 $\mathbb{T}(s)$  と  $\mathbb{T}'(s)$  を列ベクトルとする行列式  $D = \begin{vmatrix} \mathbb{T}(s) & \mathbb{T}'(s) \end{vmatrix}$  を考えると、 $D = c(a^2 + b^2) = c$  であり、また公式 7 より  $D = k$  だから、 $c = k$  となり、 $|\mathbb{T}'(s)| = |k|$  である。 //

$\mathbb{N}(s) = \frac{1}{k} \mathbb{T}'(s)$  とおき、これを単位法線ベクトル *unit normal vector* という。 $\mathbb{T}(s) \perp \mathbb{N}(s)$  であるので、曲線  $C$  上の各点において、 $\mathbb{T}(s)$  と  $\mathbb{N}(s)$  を基底とする正規直交座標系  $\{\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s)\}$  が得られる。これを平面曲線のフルネ標構 *Frenet frame* または動標構 *moving frame* という。

**【注】** フルネ *Frenet* をフレネと書いているテキストが多い。

定理 4 [フルネの公式] フルネ標構では次の等式が成り立つ.

$$\mathbb{T}'(s) = k \mathbb{N}(s), \quad \mathbb{N}'(s) = -k \mathbb{T}(s)$$

**証明** 第 1 式は  $\mathbb{N}(s)$  の定義より明らかである. 第 2 式を示す.  $\mathbb{N}'(s) = c_1 \mathbb{T}(s) + c_2 \mathbb{N}(s)$  とおく.

まず

$$|\mathbb{N}(s)| = 1 \text{ より } \mathbb{N}(s) \cdot \mathbb{N}'(s) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$|\mathbb{T}(s)| = 1 \text{ より } \mathbb{T}(s) \cdot \mathbb{T}'(s) = 0 \quad \text{したがって } \mathbb{T}(s) \cdot \mathbb{N}(s) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

すると①より

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{N}(s) \cdot \mathbb{N}'(s) = \mathbb{N}(s) \cdot (c_1 \mathbb{T}(s) + c_2 \mathbb{N}(s)) \\ &= c_2 \mathbb{N}(s) \cdot \mathbb{N}(s) = c_2 \end{aligned}$$

となるから  $\mathbb{N}'(s) = c_1 \mathbb{T}(s)$  である. 次に②の両辺を微分すると

$$\mathbb{T}'(s) \cdot \mathbb{N}(s) + \mathbb{T}(s) \cdot \mathbb{N}'(s) = 0$$

$$\text{左辺} = k \mathbb{N}(s) \cdot \mathbb{N}(s) + \mathbb{T}(s) \cdot (c_1 \mathbb{T}(s)) = k + c_1$$

より  $c_1 = -k$  となる. //

**【注】** フルネの公式は形式的に次のように表すことができる.

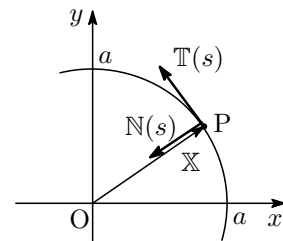
$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbb{T}(s) \\ \mathbb{N}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{T}(s) \\ \mathbb{N}(s) \end{pmatrix}$$

例 23 半径  $a$  の円  $x^2 + y^2 = a^2$  の動標構を求めよう.

**解** 単位接ベクトル  $\mathbb{T}(s) = \mathbb{X}'(s) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{s}{a} \\ \cos \frac{s}{a} \end{pmatrix}$

曲率は  $k = \frac{1}{a}$  だから, 単位法線ベクトルは

$$\mathbb{N}(s) = a \mathbb{T}'(s) = \begin{pmatrix} -\cos \frac{s}{a} \\ -\sin \frac{s}{a} \end{pmatrix}$$



例 24 曲線  $C$  について次の問を考えよう.

- (1) 曲率が常に  $k = 0$  ならば  $C$  は直線である.
- (2) 曲率が常に一定  $k = a$  (ただし  $a > 0$ ) ならば  $C$  は円である.

**解** (1) 公式 8 より  $\mathbb{T}'(s) = \mathbb{X}''(s) = \mathbb{O}$  だから  $\mathbb{X}'(s)$  は定ベクトルである.  $\mathbb{X}'(s) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$  とおくと

$\mathbb{X}(s) = \begin{pmatrix} a_1 s + a_2 \\ b_1 s + b_2 \end{pmatrix}$  となり, これは点  $(a_2, b_2)$  を通り, 方向ベクトルを  $\mathbb{X}'(s)$  とする直線を表す.

(2)  $\mathbb{X}_0(s) = \mathbb{X}(s) + \frac{1}{a} \mathbb{N}(s)$  とおくと

$$\mathbb{X}_0'(s) = \mathbb{X}'(s) + \frac{1}{a} \mathbb{N}'(s) = \mathbb{T}(s) - \mathbb{T}(s) = \mathbb{O}$$

となるので  $\mathbb{X}_0(s)$  は定ベクトルである. よって  $\mathbb{X}_0 = \mathbb{X}_0(s) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  とおくと

$$|\mathbb{X}(s) - \mathbb{X}_0| = \left| \frac{1}{a} \mathbb{N}(s) \right| = \frac{1}{a}$$

だから  $\mathbb{X}(s)$  は点  $(x_0, y_0)$  を中心とし半径  $\frac{1}{a}$  の円周上の点の位置ベクトルを表す. したがって, ある関数  $f(s)$  を用いて  $\mathbb{X}(s) = \mathbb{X}_0 + \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \cos(f(s)) \\ \sin(f(s)) \end{pmatrix}$  とおくと  $|\mathbb{X}'(s)| = 1$  より  $f(s) = as + b$  ( $b$  は定数) となるので  $\mathbb{X}(s) = \mathbb{X}_0 + \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \cos(as + b) \\ \sin(as + b) \end{pmatrix}$  と表され, これは円のベクトル表示である.

ここから定理 2 の証明の後半を示そう.

区間  $I = [0, \ell]$  を含むある区間で, 弧長パラメータ  $s$  で表された 2 つの曲線  $C_1$  と  $C_2$  があり, それぞれのベクトル表示を

$$\mathbb{X}_1(s), \quad \mathbb{X}_2(s) \quad s \in I$$

とする. 曲率はそれぞれ

$$k_1(s) = \left| \begin{matrix} \mathbb{X}'_1(s) & \mathbb{X}''_1(s) \end{matrix} \right|, \quad k_2(s) = \left| \begin{matrix} \mathbb{X}'_2(s) & \mathbb{X}''_2(s) \end{matrix} \right|$$

であるが, それが一致する

$$k_1(s) = k_2(s) \quad \forall s \in I$$

と仮定する. すると区別して表記する必要がないので単に  $k(s)$  とする. 次に, 回転と平行移動によって曲線  $C_1$  と  $C_2$  の始点 ( $s = 0$  の点) を重ねて

$$\mathbb{X}_1(0) = \mathbb{X}_2(0), \quad \mathbb{X}'_1(0) = \mathbb{X}'_2(0), \quad \mathbb{X}''_1(0) = \mathbb{X}''_2(0) \quad \dots(1)$$

と仮定すると, 2 つのフルネ標構  $\{\mathbb{T}_1(s), \mathbb{N}_1(s)\}$  と  $\{\mathbb{T}_2(s), \mathbb{N}_2(s)\}$  は  $s = 0$  で一致している. 以下, この 2 つのフルネ標構がすべての  $s \in I$  で一致することを示す.

ここから簡単のためにパラメータ  $s$  の表記を省略する. また, 同じことの繰り返しを避けるために  $i = 1, 2$  として,  $\mathbb{T}_i$  と  $\mathbb{N}_i$  の成分を列ベクトルとして含む行列を考え

$$F_i = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_i & \mathbb{N}_i \end{pmatrix} \quad \dots(3)$$

とおく. 転置行列を  ${}^tF_i$  と表すとき

$${}^tF_i F_i = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_i \\ \mathbb{N}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{T}_i & \mathbb{N}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_i \cdot \mathbb{T}_i & \mathbb{T}_i \cdot \mathbb{N}_i \\ \mathbb{N}_i \cdot \mathbb{T}_i & \mathbb{N}_i \cdot \mathbb{N}_i \end{pmatrix} = E \quad (\text{単位行列})$$

となるから

$$F_i^{-1} = {}^tF_i \quad (i = 1, 2) \quad \dots(4)$$

であり,  $F_i$  は直交行列である. また, フルネの公式より

$$\begin{pmatrix} \mathbb{T}'_i \\ \mathbb{N}'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{T}_i \\ \mathbb{N}_i \end{pmatrix}$$

であり, これを転置すると

$$\begin{pmatrix} \mathbb{T}'_i & \mathbb{N}'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_i & \mathbb{N}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$F'_i = F_i \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2) \quad \dots(5)$$

である. すると

$$(F_1 {}^tF_2)' = F'_1 {}^tF_2 + F_1 {}^t(F'_2) = F_1 \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} {}^tF_2 + F_1 \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} {}^tF_2 = 0$$

となり,  $F_1 {}^tF_2$  はパラメータ  $s \in I$  によらない定数行列であり

$$F_1(s) {}^tF_2(s) = F_1(0) {}^tF_2(0) \quad \forall s \in I \quad \dots(6)$$

である. ここで

$$F_1(0) = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_1(0) & \mathbb{N}_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_2(0) & \mathbb{N}_2(0) \end{pmatrix} = F_2(0)$$

だから, (4) より

$${}^tF_2(0) = F_2(0)^{-1} = F_1(0)^{-1} \quad \dots(7)$$

となり, (6) に戻すと

$$F_1(s) {}^tF_2(s) = F_1(0) F_1(0)^{-1} = E$$

より

$$F_1(s) = F_2(s) \quad \forall s \in I \quad \dots(8)$$

である. したがって

$$\mathbb{X}'_1(s) = \mathbb{X}'_2(s) \quad \forall s \in I \quad \dots(9)$$

であり, 初期条件 (1) より

$$\mathbb{X}_1(s) = \mathbb{X}_2(s) \quad \forall s \in I$$

となり, 曲線  $C_1$  と  $C_2$  は同じものであることが示された.

**【注】** 上の (1) で, 仮定は  $\mathbb{X}_1(0) = \mathbb{X}_2(0)$  と  $\mathbb{X}'_1(0) = \mathbb{X}'_2(0)$  だけで十分である. そこから第3の条件式  $\mathbb{X}''_1(0) = \mathbb{X}''_2(0)$  が導かれる.

**解** 曲率が一致することより

$$\left| \begin{array}{cc} \mathbb{X}'_1(0) & \mathbb{X}''_1(0) \\ \mathbb{X}'_1(0) & \mathbb{X}''_2(0) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \mathbb{X}'_1(0) & \mathbb{X}'_1(0) - \mathbb{X}''_2(0) \end{array} \right| = 0$$

だから  $\mathbb{X}''_1(0) - \mathbb{X}''_2(0) = 0$  か, または  $\mathbb{X}''_1(0) - \mathbb{X}''_2(0)$  は  $\mathbb{X}'_1(0)$  と1次従属である. 前者の場合はここで終る. 後者の場合は

$$\mathbb{X}''_1(0) - \mathbb{X}''_2(0) = c \mathbb{X}'_1(0), \quad c \neq 0$$

と表すことができる. すると

$$\mathbb{X}'_1(0) \cdot (\mathbb{X}''_1(0) - \mathbb{X}''_2(0)) = -\mathbb{X}'_1(0) \cdot \mathbb{X}''_2(0)$$

他方,  $\mathbb{X}'_1(0) \cdot (c \mathbb{X}'_1(0)) = c \neq 0$  だから

$$\mathbb{X}'_1(0) \cdot \mathbb{X}''_2(0) = \mathbb{X}'_2(0) \cdot \mathbb{X}''_2(0) \neq 0$$

となり,  $\mathbb{X}'_2(0) \perp \mathbb{X}''_2(0)$  に矛盾する. //