幾何学 II（後半）　微分幾何学入門「曲線と曲率」

幾何学 II の講義の前半では平面 $\mathbf{R}^2$ 上の 2 次曲線について線形代数の道具（ベクトル, 行列, 行列式）を使って分類することを学びました. 後半は平面 $\mathbf{R}^2$ 上または空間 $\mathbf{R}^3$ 内の曲線の形状（曲がり方）について解析学の道具（微分と積分）を使って解明することを学びます.

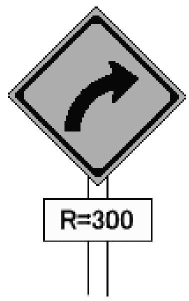
1　曲線の頂点

平面上の多角形には頂点がある. たとえば三角形には 3 つの頂点がある. それでは曲線にも頂点があるのだろうか. たとえば放物線には頂点があり, 中学生でもグラフをかいて, 頂点の位置を示すことができる. それでは円・楕円・双曲線に頂点はないのか？そもそも曲線の**頂点**とは何か？それは曲線の曲がり方と関係がありそうなので, まず曲線の曲がり方について考えてみよう.

日常生活の中で曲線の曲がり方を強く意識するのは道路の曲がりであろう. 特に自動車の運転の場合には事故の危険性が高い場所である. 国土交通省の「道路構造令」では, 自動車の交通の安全性と円滑性を確保するために, まず車道の屈曲部は「曲線形」とすることとし, そのうえで曲線部の最小半径に関して「平面線形に関する規定」という項目を設け, 次の表のように法律で定めている. 表中でカッコ内の数値は「やむを得ない場合に縮小できる半径」である.

設計速度　km/h	曲線半径　m
120	710（570）以上
100	460（380）以上
⋮	⋮
20	15 以上

右図は道路の曲がりを示す標識で, 「R= 300」と書かれている. このような標識は道路のどんな場所に設置されているのだろうか？



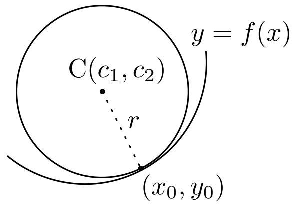
当然のことながら, 道路標識は車の運転者に伝えるものであり, この先に何があるかを示す役割がある. この標識は「この先に右カーブがあり, その曲がりは半径 300m の円と同程度である」を意味している. このように道路の曲がり方の指標となる**曲線半径**が法律で定められているが, 幾何学の専門用語ではこれを**曲率半径**といい, 以下のように定義される.

一般に, 曲線 $y = f(x)$ と円 $y = g(x)$ があり,
(1) 点 (x_0, y_0) を共有する. すなわち $f(x_0) = g(x_0) = y_0$
(2) その点における 2 次の微分係数までが一致する. すなわち

$$f'(x_0) = g'(x_0), \quad f''(x_0) = g''(x_0)$$

となるとき, $g(x)$ を**接触円** *osculating circle* または**曲率円** *curvature circle* といい, その中心 $\mathrm{C}(c_1, c_2)$ を**曲率中心** *center of curvature*, また半径 r を**曲率半径** *radius of curvature* という.

接触円



上の条件 (2) は, 曲線の接線の傾きが等しいこと, 曲線の凹凸が等しいことを意味する.

【注】中心の座標 (c_1, c_2) で半径 r の円の方程式は $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$ だから, これを y につ

いて解くと $y = c_2 \pm \sqrt{r^2 - (x - c_1)^2}$ となる．したがって「円 $y = g(x)$」とは

$$① \ g(x) = c_2 + \sqrt{r^2 - (x - c_1)^2} \quad \text{または} \quad ② \ g(x) = c_2 - \sqrt{r^2 - (x - c_1)^2}$$

のことであり, 曲線 $y = f(x)$ に応じて都合の良い方で考えれば良いとする．すなわち曲線 $y = f(x)$ が上に凸の場合には①を, 下に凸の場合は②を考えるものとする．第 2 節以降でこのような場合分けによらない一般的な定義を考える．なお以下の公式は, 証明を見れば分かるように, このような場合分けによらない結果である．

公式 1 曲線 $y = f(x)$ 上の点 (x_0, y_0) における接触円を $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$ とするとき, 次の公式が得られる．

$$c_1 = x_0 - \frac{D\,f'(x_0)}{f''(x_0)}, \quad c_2 = y_0 + \frac{D}{f''(x_0)}, \quad r = \frac{D\sqrt{D}}{|f''(x_0)|}$$

ここで, 簡単のために $D = 1 + \{f'(x_0)\}^2$ とおいている．

証明 曲率円の式を微分すると

$$x - c_1 + (y - c_2)y' = 0, \quad 1 + (y')^2 + (y - c_2)y'' = 0$$

簡単のために $f'(x_0) = y_1, f''(x_0) = y_2$ とおくと

$$(x_0 - c_1)^2 + (y_0 - c_2)^2 = r^2, \quad x_0 - c_1 + (y_0 - c_2)y_1 = 0, \quad 1 + (y_1)^2 + (y_0 - c_2)y_2 = 0$$

この連立方程式を解いて c_1, c_2, r を求めると得られる． //

問 1 上の公式 1 の証明をきちんと確認せよ．

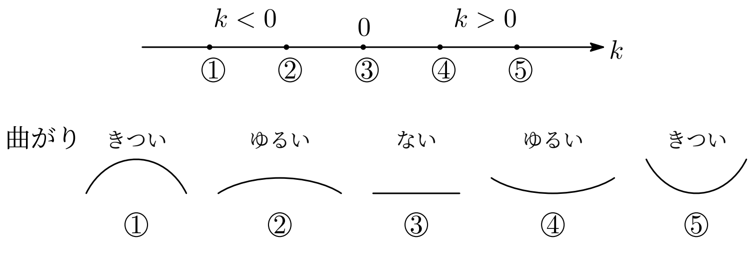
公式 2 曲率半径の逆数を**曲率** *curvature* という．すなわち

$$k = \frac{1}{r} = \frac{f''(x)}{D\sqrt{D}} = f''(x)\,D^{-3/2} \quad \text{ただし } D = 1 + \{f'(x)\}^2$$

ここで公式 1 と比較してわかるように, 曲率の定義式では $|f''(x)|$ の絶対値をはずしていることに注意せよ．すなわち k の値の正負の違いを認め, 変数の増加にしたがって, 反時計回りするとき正の曲がりといい, 時計回りするとき負の曲がりといい, それを曲率 k の符号で区別するためである．実生活では正負の違いを区別するためにプラス・マイナスではなく, 左カーブ・右カーブという．ただし, ３次元空間の中で曲線を（第 6 節以降で）考えるときは, 正の曲がり・負の曲がりという意味がなくなるので, 絶対値をつけて常に $k \geq 0$ とする．

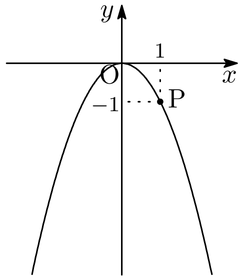
曲率の値によって以下のように考えることができる．

- 曲率が小さい ⇔ 曲率半径が大きい ⇔ 曲がり方はゆるい
- 曲率が大きい ⇔ 曲率半径が小さい ⇔ 曲がり方はきつい



- 曲線の曲がりがゆるくなるにしたがって曲率半径は $r \to \infty$ となり, 逆に曲率は $k \to 0$ となるので, 直線の場合は $r = \infty$, $k = 0$ とする．

例 1 放物線 $y=-x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(1,-1)$ における曲率中心 $\mathrm{C}(c_1,c_2)$, 曲率半径 r, 曲率 k を求めよう.



$\boxed{解}$ $y'=-2x,\ y''=-2$ であり, $x_0=1,\ y_0=-1$ を代入すると, $f'(1)=-2,\ f''(1)=-2,\ D=5$ だから, 曲率中心の座標は

$$c_1=1-\frac{-10}{-2}=-4,\quad c_2=-1+\frac{5}{-2}=-\frac{7}{2}$$

曲率半径と曲率は

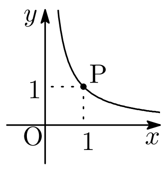
$$r=\frac{5\sqrt{5}}{|-2|}=\frac{5\sqrt{5}}{2},\quad k=-\frac{2}{5\sqrt{5}}$$

となる. //

問 2 次の計算をせよ.

(1) 放物線 $y=-x^2$ について, 点 $\mathrm{Q}(-2,-4)$ における曲率半径 r と曲率 k を求めよ.

(2) 右図のように反比例の曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ があるとき, 点 $\mathrm{P}(1,1)$ における曲率中心 $\mathrm{C}(c_1,c_2)$, 曲率半径 r, 曲率 k を求めよ.

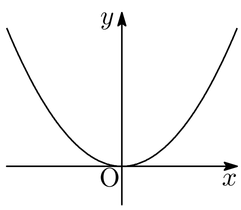


(3) 曲線 $y=\sin x$ について, $x=\dfrac{\pi}{4}$ に対応する点における曲率 k を求めよ.

平面上の曲線について, 曲率の大小が変る節目, すなわち曲率が極大または極小となる点をその曲線の**頂点** *vertex* という. 曲線の方程式が具体的に与えられているときは $k'=0$ となる点を求め, 増減表を作ることで確認できる.

【注】単に $k'=0$ だけで頂点を定義するテキストもあるが, このテキストでは上のように「曲率が極大または極小となる点」と定義する.

例 2 放物線 $y=ax^2$ （$a>0,\ -\infty<x<\infty$）について, 頂点を調べよう.



$\boxed{解}$ 曲率を求めると, $y'=2ax,\ y''=2a$ より

$$k==2a\left(1+4a^2x^2\right)^{-3/2}$$

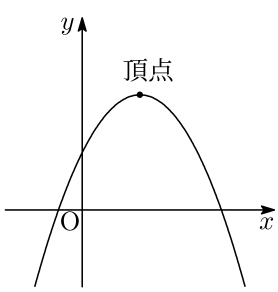
となり,

$$k'=-24a^3x\left(1+4a^2x^2\right)^{-5/2}$$

$$k'=0 \Leftrightarrow x=0$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
k'	$+$	0	$-$
k	↗	極大	↘

増減表を作ると, 曲率 k は $x=0$ のとき極大になる. したがって頂点は原点であり, それ以外にはないことがわかる. //



放物線のグラフを平行移動しても回転させても曲線上の頂点の位置は変らない（問 10 より）から, 放物線の頂点の位置は右図のように示すことができる.

問 3 上の例 2 の解をきちんと計算して確かめよ.

問 4 曲線 $y=\sqrt{x}\quad(x\geq 0)$ に対して曲率を調べて頂点を求めよ.

問 5 曲線 $y=ax^3$（$a\neq 0$）には頂点が 2 つあることを示せ.

問 6 曲線 $y=\cos x$ の頂点を求めよ. ただし $0\leq x\leq 2\pi$ とする.

曲線の方程式が極座標で表されているときは次の公式を使う.

公式 3 極座標の方程式 $r = f(\theta)$ で曲線が与えられているとき, 曲率は $k = \dfrac{f^2 + 2(f')^2 - f \cdot f''}{\{f^2 + (f')^2\}^{3/2}}$ である.

証明 省略. 問 11 で考えよう.

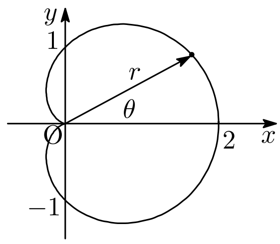
例 3 半径 a の円の曲率を求めよう.

解 方程式は $r = a$ であり, $f = a$, $f' = f'' = 0$ だから公式により $k = \dfrac{a^2 + 0 - 0}{(a^2 + 0)^{3/2}} = \dfrac{1}{a}$

例 4 右図は**カージオイド**とよばれる曲線であり, 方程式は

$$r = 1 + \cos\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

である. 曲率と頂点を求めよう.



解 $f = 1 + \cos\theta$, $f' = -\sin\theta$, $f'' = -\cos\theta$ を公式に入れると曲率は $k = \dfrac{3}{2\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos\theta}}$ となる. 次に $k' = \dfrac{3\sin\theta}{2\sqrt{2}}\left(1 + \cos\theta\right)^{-3/2}$ より $k' = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0, \pi$ であるが, $\theta = \pi$ のとき曲線は原点のところで尖がっているので, 除外する. 下記【注】参照.
増減表で確認すると, $\theta = 0$ のところで曲率 k は極小となることが分かり, したがって頂点は $(2, 0)$ である.

【注】曲線上の点の動きを考えると, 変数 θ の増加にともなって出発点 $(2, 0)$ から上半分の曲線上を反時計回りに移動し, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき y 軸上の点 $(0, 1)$ を通り, $\theta = \pi$ のとき原点に到達する. そこで突然進む方向を変えて下半分の曲線を描いて $\theta = 2\pi$ のとき出発点に戻る. このように曲線上の点の動きを見て, 突然進む方向を変える地点があれば, その点（**特異点**という）は議論の対象にしない. これについてはあとで（例 5 で）説明する.
【注】カージオイドについてはまたあとで（例 20 で）考える.

問 7 上の例 4 の解をきちんと確認せよ.