6　空間曲線

3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ 内の曲線のベクトル表示は

$$\mathbb{X} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

のように自然に拡張して考える．逆に平面 $\mathbf{R}^2$ 上の曲線は $z(t) = 0$ という特別な場合と考えることができる．空間曲線の場合も, $\mathbb{X}'$ を**接ベクトル**といい, 条件 $\mathbb{X}' \neq \mathbb{O}$ のもとで議論する．

以下の問 29, 公式 9, 定理 3 は曲線についてではなく，一般に 3 次元ベクトルについての関係式である．

問 29 次の等式を証明せよ．

(1) $(\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y})' = \mathbb{X}' \cdot \mathbb{Y} + \mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}'$

(2) $(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})' = \mathbb{X}' \times \mathbb{Y} + \mathbb{X} \times \mathbb{Y}'$

(3) $\left(\dfrac{1}{|\mathbb{X}'|}\right)' = -\dfrac{\mathbb{X}' \cdot \mathbb{X}''}{|\mathbb{X}'|^3}$

上の問の (1) は，2 次元ベクトルについての問 23 と同じ関係式が，3 次元ベクトルについても成り立つことを示している．

公式 9 一般に次の等式が成り立つ．これを**ラグランジュの公式**という．

$$(\mathbb{U} \times \mathbb{V}) \times \mathbb{W} = (\mathbb{U} \cdot \mathbb{W})\mathbb{V} - (\mathbb{V} \cdot \mathbb{W})\mathbb{U}$$

$\boxed{\text{証明}}$ 省略．ベクトルを成分表示し, 内積と外積の定義に従って式変形すると得られる．

公式 10 空間曲線 $\mathbb{X} = \mathbb{X}(t)$ の**曲率**を次のように定義する．

$$k = \frac{|\mathbb{X}' \times \mathbb{X}''|}{|\mathbb{X}'|^3}$$

空間内においては曲線が左カーブなのか, 右カーブなのかは意味がなくなるので, 常に $k \geq 0$ として, その大きさだけが重要になってくる．

平面曲線の場合は

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 0 \end{pmatrix}$$

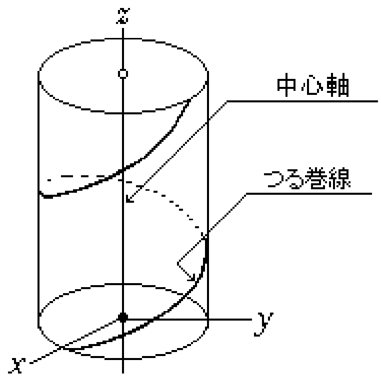
より

$$\mathbb{X}' \times \mathbb{X}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \text{ここで} \quad \beta = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

となるので, 公式 10 による定義は公式 4 と矛盾しない．

問 30 次の式で表される曲線を**つる巻き線**または**常螺線** *helix* または**円柱螺旋**という．ただし a, b は正の定数とする．

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}$$



以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{X}'$ と $\mathbb{X}''$ を求めよ.

(2) $|\mathbb{X}'|$ を求めよ.

(3) $\mathbb{X}' \times \mathbb{X}''$ を求めよ.

(4) 曲率 k を求めよ.

空間曲線の場合

$$s = \int_a^t \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt = \int_a^t |\mathbb{X}'|\, dt$$

を**弧長** *arc length* という. 曲線を弧長 s を媒介変数とするベクトル表示すれば, 常に

$$\left|\frac{d\mathbb{X}(s)}{ds}\right| = 1$$

が成り立つ. そこで**単位接ベクトル** $\mathbb{T}$ を次のように定義する.

$$\mathbb{T}(s) = \frac{d\mathbb{X}(s)}{ds} \quad \text{または} \quad \mathbb{T}(t) = \frac{1}{|\mathbb{X}'(t)|}\,\mathbb{X}'(t)$$

問 31 つる巻き線の弧長 s と単位接ベクトル $\mathbb{T}(t)$ を求めよ.

公式 11 $\quad |\mathbb{T}'(s)| = k \quad$ (k は曲率)

証明 $\mathbb{T}'(s) = \dfrac{d\,\mathbb{T}(s)}{ds} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathbb{X}'(t)}{|\mathbb{X}'(t)|}\right)\dfrac{dt}{ds}$

$$= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\mathbb{X}'(t)|}\right)\mathbb{X}'(t) + \frac{1}{|\mathbb{X}'(t)|}\,\mathbb{X}''(t)\right)\frac{1}{|\mathbb{X}'(t)|}$$

$$= \left(-\frac{\mathbb{X}'(t)\cdot\mathbb{X}''(t)}{|\mathbb{X}'(t)|^3}\,\mathbb{X}'(t) + \frac{\mathbb{X}'(t)\cdot\mathbb{X}'(t)}{|\mathbb{X}'(t)|^3}\,\mathbb{X}''(t)\right)\frac{1}{|\mathbb{X}'(t)|} \qquad \leftarrow \text{問 } 29$$

$$= \frac{(\mathbb{X}'(t)\times\mathbb{X}''(t))\times\mathbb{X}'(t)}{|\mathbb{X}'(t)|^4} \qquad \leftarrow \text{公式 } 9$$

ここで $(\mathbb{X}'(t)\times\mathbb{X}''(t)) \perp \mathbb{X}'(t)$ だから

$$|\mathbb{T}'(s)| = \frac{|\mathbb{X}'(t)\times\mathbb{X}''(t)|\times|\mathbb{X}'(t)|}{|\mathbb{X}'(t)|^4} = \frac{|\mathbb{X}'(t)\times\mathbb{X}''(t)|}{|\mathbb{X}'(t)|^3} = k \qquad //$$

この公式により, 空間曲線の場合も弧長パラメータを用いると, 曲率は $k = |\mathbb{X}''(s)|$ と求めることができる.

ベクトル $\mathbb{X}'$ と $\mathbb{X}''$ で生成される平面を**接触平面** *osculating plane* という. 空間曲線を局所的に見るとその接触平面上の曲線と考えることができる. 曲線上で $\mathbb{X}'\times\mathbb{X}'' = \mathbb{O}$ となる点を**逗留点** *stationary point* という. すなわち逗留点とは接触平面が存在しない点である. または

$$\mathbb{X}'\times\mathbb{X}'' = \mathbb{O} \Leftrightarrow |\mathbb{X}'\times\mathbb{X}''| = 0$$

だから, 逗留点とは曲率が $k = 0$ となる点であると言い換えることもできる. 以後, 逗留点がない曲線のみを考えることにする.

例 25 つる巻き線の場合, ベクトル $\mathbb{X}'$ と $\mathbb{X}''$ は 1 次独立だから, 逗留点はまったくない. すなわち, どの点においても接触平面が存在する.

たとえば $t = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点における接触平面は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/\sqrt{2} \\ a/\sqrt{2} \\ b\pi/4 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -a/\sqrt{2} \\ a/\sqrt{2} \\ b \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -a/\sqrt{2} \\ -a/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p, q \in \mathbf{R}$$

であり, 係数 p, q を消去すると $bx - by + \sqrt{2}\,az = \dfrac{ab\pi}{2\sqrt{2}}$ と表すことができる.

または以下のように考えることもできる. 外積を求めると

$$\mathbb{X}' \times \mathbb{X}'' = \begin{pmatrix} ab\sin t \\ -ab\cos t \\ a^2 \end{pmatrix}$$

であり, $t = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b\pi}{4}\right)$ における接触平面は,

$$\mathbb{X}'(\pi/4) \times \mathbb{X}''(\pi/4) = \begin{pmatrix} ab/\sqrt{2} \\ -ab/\sqrt{2} \\ a^2 \end{pmatrix}$$

を法線ベクトルとする平面だから

$$\frac{ab}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) - \frac{ab}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) + a^2\left(z - \frac{b\pi}{4}\right) = 0$$

より $bx - by + \sqrt{2}\,az - \dfrac{ab\pi}{2\sqrt{2}} = 0$ を得る. //

例 26 点 (x_0, y_0, z_0) を通り, 方向ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の直線の方程式は

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + at \\ y_0 + bt \\ z_0 + ct \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbf{R}$$

だから

$$\mathbb{X}' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore \mathbb{X}' \times \mathbb{X}'' = \mathbb{O}$$

すなわち, 直線の場合, すべての点が逗留点である. 言い換えると, 常に $k = 0$ だから, 直線とは曲がったところがない「どこまでもまっすぐな曲線」であり, どこにも接触平面が存在しないのである.