4　いろいろなパラメータ

曲線の式は変数（パラメータ）の取り方によっていろいろ考えられ, それによって曲率の計算過程もさまざまである. その一例として円について考えてみよう. 原点を中心とし, 半径 a の円 $x^2+y^2=a^2$ を極座標で考えると例 8 で見た通りである. すなわち

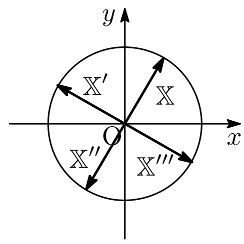
ベクトル表示　$\mathbb{X}=\begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \end{pmatrix}$　　$0\leq t\leq 2\pi$

$$\mathbb{X}'=\begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix},\quad \mathbb{X}''=\begin{pmatrix} -a\cos t \\ -a\sin t \end{pmatrix},\quad \alpha=|\mathbb{X}'|^2=a^2,\quad \beta=\begin{vmatrix} \mathbb{X}' & \mathbb{X}'' \end{vmatrix}=a^2,\quad k=\frac{\beta}{\alpha\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{a}$$

【注】 さらに微分を続けると

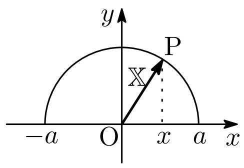
$$\mathbb{X}'''=\frac{d^3}{dt^3}\mathbb{X}=\begin{pmatrix} a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix},\quad \frac{d^4}{dt^4}\mathbb{X}=\mathbb{X}$$

となり, 微分するごとにベクトルの向きが原点の回りに 90° ずつ回転することがわかる. 大きさは変らず $|\mathbb{X}|=|\mathbb{X}'|=|\mathbb{X}''|=\cdots=a$ である.



例 15 円のベクトル表示を直交座標を用いて示し, それを元に曲率を計算しよう.

$\boxed{\text{解}}$ 半円 $y\geq 0$ の部分は $y=\sqrt{a^2-x^2}$ と表せるので, 位置ベクトルを $\mathbb{X}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくとベクトル表示は



$$\mathbb{X}=\begin{pmatrix} x \\ \sqrt{a^2-x^2} \end{pmatrix}\qquad -a\leq x\leq a$$

である. これを元に計算すると

$$\mathbb{X}'=\begin{pmatrix} 1 \\ -x(a^2-x^2)^{-1/2} \end{pmatrix},\qquad \mathbb{X}''=\begin{pmatrix} 0 \\ -a^2(a^2-x^2)^{-3/2} \end{pmatrix}\qquad \text{ただし } -a<x<a \text{ のとき}$$

すると

$$\alpha=|\mathbb{X}'|^2=\frac{a^2}{a^2-x^2},\qquad \beta=\begin{vmatrix} \mathbb{X}' & \mathbb{X}'' \end{vmatrix}=\frac{-a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$$

より, 曲率は $k=\dfrac{\beta}{\alpha\sqrt{\alpha}}=-\dfrac{1}{a}$ と得られる. //

【注】 計算過程は少々やっかいである. なお, 以下の関係式が得られる.

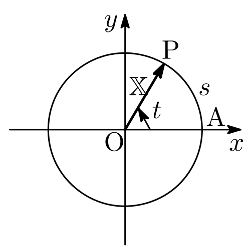
$$|\mathbb{X}|=a,\quad |\mathbb{X}'|=a(a^2-x^2)^{-1/2},\quad |\mathbb{X}''|=a^2(a^2-x^2)^{-3/2}$$

$$|\mathbb{X}|=a\text{（一定）より } \mathbb{X}\perp\mathbb{X}',\quad \text{しかし } \mathbb{X}'\cdot\mathbb{X}''\neq 0$$

問 26 上の例 15 の計算過程をきちんと確かめよ.

例 16 始点 A $(a,0)$ から点 P までの円弧の長さ $s=\overset{\frown}{AP}$ をパラメータとしてベクトル表示を求め, それを元に曲率を計算しよう.

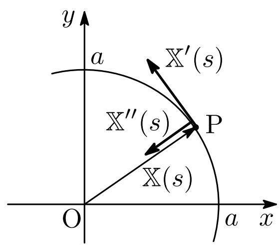
$\boxed{\text{解}}$ 角 t を弧度法で測るとき, $s=at$ であるから $t=\dfrac{s}{a}$ となる. これを例 8 のベクトル表示に適用すると



$$\mathbb{X}=\begin{pmatrix} a\cos\dfrac{s}{a} \\ a\sin\dfrac{s}{a} \end{pmatrix}\qquad 0\leq s\leq 2\pi a\qquad\cdots\ ☆$$

となる. ここで s を円の**弧長パラメータ** arc length parameter といい, ☆を円の弧長パラメータ表示 arc length parameterization という. これを微分すると

$$\mathbb{X}' = \begin{pmatrix} -\sin\dfrac{s}{a} \\ \cos\dfrac{s}{a} \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{X}'' = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} -\cos\dfrac{s}{a} \\ -\sin\dfrac{s}{a} \end{pmatrix} = -\frac{1}{a^2}\,\mathbb{X}$$



となり

$$\alpha = |\mathbb{X}'|^2 = 1, \qquad \beta = \begin{vmatrix} \mathbb{X}' & \mathbb{X}'' \end{vmatrix} = \frac{1}{a}$$

より曲率 $k = \dfrac{\beta}{\alpha\sqrt{\alpha}} = \dfrac{1}{a}$ が得られる．//

【注】 弧長パラメータ s を使う場合, その変数 s を明示して $\mathbb{X}(s)$ と表すものとする．するとこの例の場合, 次の関係式が得られることがわかる．

$$|\mathbb{X}(s)| = a, \quad |\mathbb{X}'(s)| = 1, \quad |\mathbb{X}''(s)| = \frac{1}{a}, \quad |\mathbb{X}'''(s)| = \frac{1}{a^2} \quad \cdots$$
$$\mathbb{X}(s) \perp \mathbb{X}'(s), \quad \mathbb{X}'(s) \perp \mathbb{X}''(s), \quad \mathbb{X}''(s) \perp \mathbb{X}'''(s), \quad \cdots$$

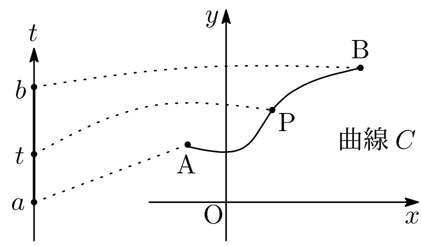
ベクトル $\mathbb{X}'(s)$ の向きは上図のように点 P において円の接線方向であり, ベクトル $\mathbb{X}(s)$, $\mathbb{X}'(s)$, $\mathbb{X}''(s)$ の向きは 90° ずつ回転するように見え, 大きさは, $a > 1$ のときだんだん縮小し, $a < 1$ のときだんだん拡大するようになる．

曲線の式を弧長パラメータを用いて表すことには大きな意味があり, 最大の特徴は上の例で見たように常に $|\mathbb{X}'(s)| = 1$ となることである．それを一般の曲線 C について考えてみよう．

公式 6 曲線 C のベクトル表示

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad a \leq t \leq b$$

があるとき, $t = a$ に対応する点 A から $t = b$ に対応する点 B までの間の弧長 ℓ は次の式で求められる．証明は解析学の教科書で確認せよ．



$$\ell = \int_a^b |\mathbb{X}'|\,dt = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt$$

また, 始点 A を固定し, 終点 P を曲線上で動かして

$$s = \int_a^t |\mathbb{X}'|\,dt = \int_a^t \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt$$

とおく．これが**弧長パラメータ**である．

例 17 半径 a の円の場合, ベクトル表示 $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \end{pmatrix}$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$ より, $|\mathbb{X}'| = a$ だから, 弧長パラメータは $s = \displaystyle\int_0^t |\mathbb{X}'|\,dt = \int_0^t a\,dt = at$ と求められる．

定理 1 曲線が弧長パラメータ s を用いたベクトル表示 $\mathbb{X}(s)$ の場合, 恒等的に $\quad |\mathbb{X}'(s)| = 1 \quad$ である．

$\boxed{\text{証明}}$ 弧長の定義より s は変数 t の関数であり, $\dfrac{ds}{dt} = |\mathbb{X}'(t)| > 0$ である．これは関数 $s = s(t)$ が狭義の単調増加関数であることを意味する．すると逆関数 $t = t(s)$ が存在するので, これを代入することで, 弧長 s をパラメータとするベクトル表示

$$C \ : \ \mathbb{X}(s) = \begin{pmatrix} x(t(s)) \\ y(t(s)) \end{pmatrix} \qquad s(a) \leq s \leq s(b)$$

が得られ, 合成関数の微分法と逆関数の微分法により, また, $\dfrac{ds}{dt} = |\mathbb{X}'| > 0$ であること, さらに $\left|\dfrac{d\mathbb{X}}{dt}\right| = |\mathbb{X}'|$ であることから $\left|\dfrac{d\mathbb{X}}{ds}\right| = \left|\dfrac{d\mathbb{X}}{dt}\,\dfrac{dt}{ds}\right| = \left|\dfrac{d\mathbb{X}}{dt}\right| \dfrac{1}{|\mathbb{X}'|} = 1$ となる．//

すると次の結論は明らかであろう.

公式 7 弧長パラメータ表示の曲線の場合, 曲率は $k = \begin{vmatrix} \mathbb{X}'(s) & \mathbb{X}''(s) \end{vmatrix}$ である.

【注】 弧長パラメータを使うとき, さらにあとで公式 8 より $|k| = |\mathbb{X}''(s)|$ となることもわかる.

弧長はパラメータの取り方によらないことを確認しておこう. ある変数 t をパラメータとする正則な曲線

$$C \ : \ \mathbb{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad a \leq t \leq b$$

について, 別の変数 u をパラメータを取って

$$C \ : \ \mathbb{X}(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} \quad c \leq u \leq d$$

と表せているとする. ここでパラメータの変換 $t = t(u)$ は無限回微分可能かつ $t'(u) \neq 0$ とする. 合成関数の微分法により

$$\mathbb{X}'(u) = \frac{d\mathbb{X}(u)}{du} = \frac{d\mathbb{X}(t)}{dt}\,\frac{dt}{du} = \mathbb{X}'(t)\,t'(u)$$

だから

$$\int_c^d |X'(u)|\,du = \int_c^d |\mathbb{X}'(t)|\,|t'(u)|\,du \quad \cdots ☆$$

となる. ここで置換積分法を使うが, $t'(u) \neq 0$ より $t'(u) > 0$ または $t'(u) < 0$ の 2 つの場合に分けて考える.

(1) $t'(u) > 0$ のとき $|t'(u)| = t'(u)$ であり, $\begin{array}{c|c} u & c \to d \\ \hline t & a \to b \end{array}$ だから

$$☆ = \int_c^d |\mathbb{X}'(t)|\,t'(u)\,du = \int_a^b |\mathbb{X}'(t)|\,dt$$

(2) $t'(u) < 0$ のとき $|t'(u)| = -t'(u)$ であり, $\begin{array}{c|c} u & c \to d \\ \hline t & b \to a \end{array}$ だから

$$☆ = \int_c^d |\mathbb{X}'(t)|\,(-t'(u))\,du = -\int_b^a |\mathbb{X}'(t)|\,dt = \int_a^b |\mathbb{X}'(t)|\,dt$$

このように $\displaystyle\int_c^d |X'(u)|\,du = \int_a^b |\mathbb{X}'(t)|\,dt$ である.

次に, 曲線が弧長パラメータ s で表されているとき, 恒等的に $|\mathbb{X}'(s)| = 1$ であるが, この逆を考えてみよう. 曲線のベクトル表示 $\mathbb{X}$ はあるパラメータ t で表され, 常に $|\mathbb{X}'| = 1$ であるとする. このとき弧長は

$$s = \int_a^t |\mathbb{X}'|\,dt = \int_a^t dt = t - a \quad \text{より} \quad t = \int_a^t |\mathbb{X}'|\,dt + a = s + a$$

となり, t は弧長を意味するパラメータであることがわかる. 定数項の a は曲線をどの点から見るかによって決まる値なので本質的なものではない. このことから一般に, 曲線のベクトル表示 $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ があり, 常に $|\mathbb{X}'| = 1$ となっているならば, 変数 t を**弧長パラメータ**と定義することができる.

弧長パラメータ s のとき曲率は $k(s) = \begin{vmatrix} \mathbb{X}'(s) & \mathbb{X}''(s) \end{vmatrix}$ であるが, 一般のパラメータのときの曲率 $k(t)$ との関係を確認しておこう. 曲線のベクトル表示 $\mathbb{X}(t)$ があり, $t = t(s)$ とすると

$$
\begin{aligned}
k(s) &= \begin{vmatrix} \mathbb{X}'(t(s)) & \mathbb{X}''(t(s)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{d\mathbb{X}(t(s))}{ds} & \dfrac{d\mathbb{X}'(t(s))}{ds} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \dfrac{d\mathbb{X}(t)}{dt}\dfrac{dt}{ds} & \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{d\mathbb{X}(t)}{dt}\dfrac{dt}{ds}\right) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \dfrac{\mathbb{X}'(t)}{|\mathbb{X}'|} & \dfrac{\mathbb{X}''(t)}{|\mathbb{X}'|^2} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} \mathbb{X}' & \mathbb{X}'' \end{vmatrix}}{|\mathbb{X}'|^3} = k(t) \qquad \text{（公式 4）}
\end{aligned}
$$

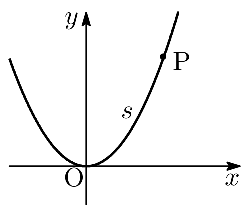
ただし, 一般に弧長パラメータを用いて曲線を表すことは容易でない. そもそも原始関数 $\displaystyle\int |\mathbb{X}'|\,dt$ を求めることができない（初等関数として表すことができないという意味で）ことがあるからであり, また簡単な曲線についても弧長の計算が難しいこともよくある.

たとえば, 楕円（例 13）の弧長を考えてみよう.

$$
\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}' = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad s = \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt
$$

であるが, これは計算できない. **楕円積分**と呼ばれ, いわゆる初等関数の範囲では求めることができないのである. 一般にはこのように計算できない場合が圧倒的に多い. 以下, 公式 6 により弧長を計算できるよく知られた曲線を見てみよう.

例 18 放物線 $y = ax^2$（$a > 0$）の $x = 0$ からの弧長 s を求めよう.
また放物線 $y = x^2$ の $x = 0$ から $x = 1$ までの弧の長さ ℓ を求めよ.

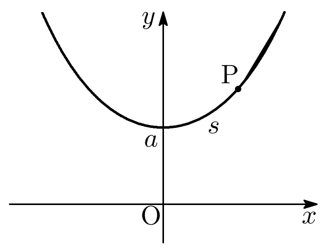


解 $s = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + 4a^2x^2}\,dx$ であり, 積分公式

$$
\int \sqrt{x^2 + a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|\right)
$$

を使えば, $s = \dfrac{1}{4a}\left\{2ax\sqrt{1+4a^2x^2} + \log\left(2ax + \sqrt{1+4a^2x^2}\right)\right\}$ となる. 次に $a = 1$, $x = 1$ のとき $\ell = \dfrac{1}{4}\left\{2\sqrt{5} + \log\left(2 + \sqrt{5}\right)\right\}$ となる. //

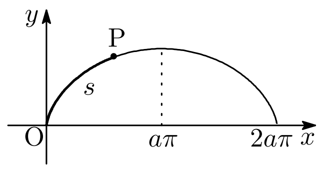
例 19 カテナリ $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ の $x = 0$ から $x > 0$ までの弧長 s を求めよう.



解 $(x')^2 + (y')^2 = 1 + \left\{\dfrac{1}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right)\right\}^2 = \dfrac{1}{4}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)^2$
より

$$
s = \int_0^x \frac{1}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)dx = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right) \quad //
$$

例 20 サイクロイド $\mathbb{X} = a\begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$（$0 \leq t \leq 2\pi$）の弧長 s を求めよう. また, 全体の弧の長さ ℓ を求めよ.



解 $|\mathbb{X}'| = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a\sin\dfrac{t}{2}$ であり

$$
s = 2a\int_0^t \sin\frac{t}{2}\,dt = 4a\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right) \qquad \text{また, } t = 2\pi \text{ のとき } \ell = 8a \text{ となる. //}
$$

例 21 カージオイド $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a(1+\cos t)\cos t \\ a(1+\cos t)\sin t \end{pmatrix}$（$0 \leq t \leq \pi$）の弧長 s を求めよう. また, 全体の弧の長さ ℓ を求めよ.

解 $f(t) = a(1+\cos t)$ とおけば $|\mathbb{X}'| = \sqrt{f'(t)^2 + f(t)^2} = 2a\cos\dfrac{t}{2}$ となるので

$$s = 2a\int_0^t \cos\frac{t}{2}\,dt = 4a\sin\frac{t}{2}$$

であり, $\ell = 2 \times 4a\sin\dfrac{\pi}{2} = 8a$ となる. //

【注】 全体の長さ ℓ は y 軸の下半分 $\pi \leq t \leq 2\pi$ の部分も含めているものであり, それは上半分 $0 \leq t \leq \pi$ とグラフの形が対称なので上記のように 2 倍している.

例 22 アストロイド $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a\cos^3 t \\ a\sin^3 t \end{pmatrix}$ $(0 \leq t \leq \pi/2)$ の弧長 s を求めよう. また, 全体の弧の長さ ℓ を求めよ.

解 $|\mathbb{X}'| = 3a\sqrt{\cos^4 t\,\sin^2 t + \sin^4 t\,\cos^2 t} = 3a\sin t\,\cos t = \dfrac{3a}{2}\,\sin 2t$ より

$$s = \frac{3a}{2}\int_0^t \sin 2t\,dt = \frac{3a}{4}\,(-\cos 2t + 1)$$

であり, $\ell = 4 \times \dfrac{3a}{4}\,(-\cos\pi + 1) = 6a$ となる. //

【注】 これも上の例 21 と同様に, グラフの形の対称性により 4 倍して ℓ を求めている.

問 27 例 18〜22 の計算をきちんと確かめよ.