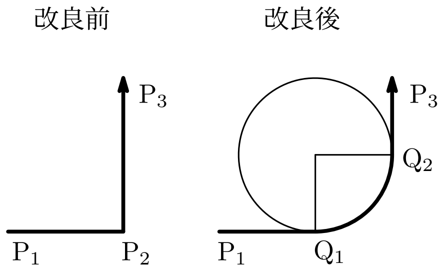
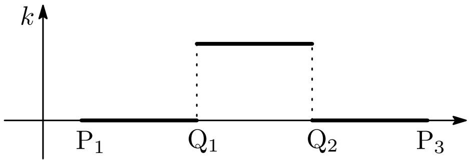
3　いろいろな平面曲線

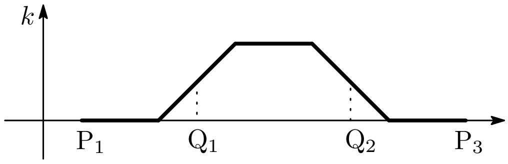
右図のように点 P_2 で直角に曲がる道路があるとき，角を曲線に改良することを考えよう．自動車を運転して点 P_1 を出発し，点 P_3 に向かって進む場合，点 P_2 を通らず，円周の一部を使って道路を改良し，点 Q_1 の直前に左カーブがあることと曲線半径を示す道路標識を立てると良いだろうか？点 Q_1 または Q_2 における円周の接線方向は直線 P_1Q_1 または Q_2P_2 と同じなので，ハンドルを急にきる必要がないから安全なように思える．



しかし実はこれは改良にならず，特に点 Q_1 または Q_2 付近で重大な事故が発生する恐れがある．直線の曲率は $k=0$ であり，円の曲率は $k=1/a$（円の半径 a の逆数）である．通過地点と曲率の関係は次のようなグラフになることから，曲率が変るところで急ハンドルを切らなければならないのである．



曲率の値が不連続になる点 Q_1 と Q_2 の付近で，下図のようにグラフがつながるようにしなければ本当の改良にならない．すなわち曲率が $k=ct$（c は定数）となる緩和曲線が必要である．



例 12 次の関数を成分とする $\mathbb{X}=\begin{pmatrix}x(s)\\y(s)\end{pmatrix}$ によって表されるものを**クロソイド曲線** *clothoid curve* という．曲率は $k=cs$ である．

$$x(s)=\int_0^s\cos\frac{ct^2}{2}\,dt\qquad y(s)=\int_0^s\sin\frac{ct^2}{2}\,dt$$

$\boxed{解}$ 微分すると

$$x'=\frac{d}{ds}\int_0^s\cos\frac{ct^2}{2}\,dt=\cos\frac{cs^2}{2},\qquad y'=\frac{d}{ds}\int_0^s\sin\frac{ct^2}{2}\,dt=\sin\frac{cs^2}{2}$$

であり，$|\mathbb{X}'|=1$ となる．さらに

$$x''=-cs\sin\frac{ct^2}{2},\qquad y''=cs\cos\frac{ct^2}{2}$$

であり，$k=\begin{vmatrix}\mathbb{X}' & \mathbb{X}''\end{vmatrix}=cs$ となる．//

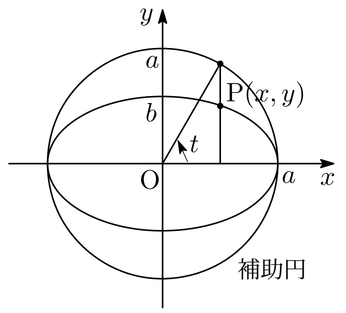
問 13 クロソイド曲線は，ギリシャ神話の糸をつむぐ女神クローソー $K\lambda\omega\theta\omega$（Clotho）にちなんで，イタリアの数学者チェザロ（Ernesto Cesàro, 1859〜1906）によって名づけられたという．この曲線を道路に実際に応用した例を調べよ．

公式 5 曲線 $\mathbb{X}=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ に対して，$\alpha=|\mathbb{X}'|^2$，$\beta=\begin{vmatrix}\mathbb{X}' & \mathbb{X}''\end{vmatrix}$ とおくとき頂点は $H=\alpha\beta'-\dfrac{3}{2}\alpha'\beta=0$ から得られる．

証明 $k=\beta\,\alpha^{-3/2}$ であり $k'=\left(\alpha\beta'-\dfrac{3}{2}\,\alpha'\beta\right)\alpha^{-5/2}$ となるからである. //

以下よく知られた曲線について曲率 k を求め, 頂点を調べてみよう.

例 13 楕円は右図のパラメータ t を用いて, $\mathbb{X}=\begin{pmatrix}a\cos t\\ b\sin t\end{pmatrix}$ と表すことができる. a,b は正の定数. また $0\leq t<2\pi$ とする.



解 簡単な計算で

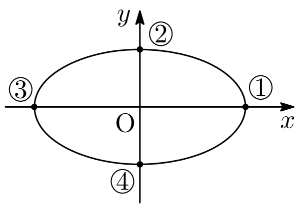
$$\alpha=a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t,\quad \beta=\begin{vmatrix}-a\sin t & -a\cos t\\ b\cos t & -b\sin t\end{vmatrix}=ab$$

となるから, 曲率は $k=ab\,(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{-3/2}$ である.
また $H=-3ab(a^2-b^2)\sin t\,\cos t$ となり

$$H=0\ \Leftrightarrow\ \sin t=0 \text{ または } \cos t=0\ \Leftrightarrow\ t=0,\,\pi,\,\frac{\pi}{2},\,\frac{3\pi}{2}$$

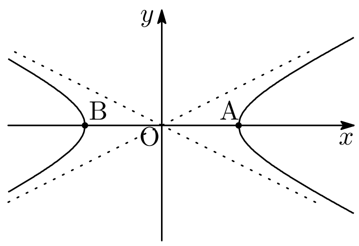
$a>b$ のとき, 増減表は次のようになり, 4つの頂点①〜④があることがわかる. //

t	① 0	$\cdots$	② $\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	③ π	$\cdots$	④ $\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$
H	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
k	極大	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗



問 14 上の例の解をきちんと確認せよ.

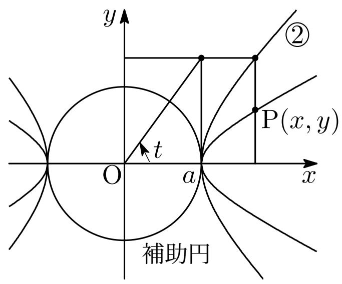
例 14 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の頂点は 2 つあり, それは右図の 2 点 $\mathrm{A}(a,0),\mathrm{B}(-a,0)$ である.
図で点線の直線は漸近線 $y=\pm\dfrac{b}{a}\,x$ である.



解 双曲線のベクトル表示は

$$\mathbb{X}=\begin{pmatrix}a\sec t\\ b\tan t\end{pmatrix}\qquad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{3\pi}{2}\,,t\neq\frac{\pi}{2}$$

である. 曲線②は補助の双曲線 $x^2-y^2=a^2$ である. 簡単のために $\mathrm{S}=\sin t,\mathrm{C}=\cos t$ とおくと



$$\mathbb{X}'=\begin{pmatrix}\dfrac{a\mathrm{S}}{\mathrm{C}^2}\\ \dfrac{b}{\mathrm{C}^2}\end{pmatrix}\qquad \mathbb{X}''=\begin{pmatrix}\dfrac{a(\mathrm{S}^2+1)}{\mathrm{C}^3}\\ \dfrac{2b\mathrm{S}}{\mathrm{C}^3}\end{pmatrix}$$

となり

$$\alpha=\frac{a^2\mathrm{S}^2+b^2}{\mathrm{C}^4}\,,\quad \beta=\frac{-ab}{\mathrm{C}^3}\,,\quad k=\frac{-ab\cos^3 t}{\left(a^2\sin^2 t+b^2\right)^{3/2}}$$

である. また $H=\alpha\,\beta'-\dfrac{3}{2}\,\alpha'\,\beta=\dfrac{3ab(a^2+b^2)\sin t}{\cos^8 t}$ より

$$H=0\ \Leftrightarrow\ \sin t=0$$

となり, $t=0,\,\pi$ のとき $k'=0$ である. この結果, 頂点は A, B の 2 点であることがわかる. //

問 15 上の例の解をきちんと確認せよ.

【注】双曲線の場合は, 媒介変数 t を用いないで, 共役な双曲線 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の１葉 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}$ の頂点が $(0,b)$ であることを示し, 座標軸を取り替えることで上の例 14 の結果を導く方が計算が楽である.

問 16 次の曲線について, 曲率を調べ, 頂点を求めよ.

(1) 双曲線　$y=\dfrac{1}{x}$（$x\neq 0$）

(2) 自然対数曲線　$y=\log x$　（$x>0$）

(3) 正弦曲線　$y=\sin x$　（$0\leq x\leq 2\pi$）

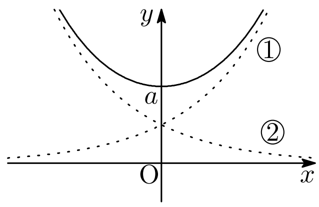
問 17 パスカルのリマソン（例 9）について, 曲率は $k=3(3+2\cos t)(5+4\cos t)^{-3/2}$ になることを導き，２つの頂点 $(3,0)$ と $(1,0)$ があることを示せ.

問 18 ベルヌーイのレムニスケート $r=\sqrt{\cos 2\theta}$（例 10）について, 曲率は $k=3\sqrt{\cos 2\theta}$ になることを導き，２つの頂点 $(-1,0)$ と $(1,0)$ があることを示せ.

問 19 次の式で表される曲線を**カテナリ** *catenary*（懸垂線）という. ただし a は正の定数とする.

$$y=a\cosh\frac{x}{a}\qquad \text{または}\qquad y=a\left(\frac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}\right)$$

曲率は $k=\dfrac{1}{a\cosh^2\dfrac{x}{a}}$ になることを導き, 頂点は $(0,a)$ であることを示せ.

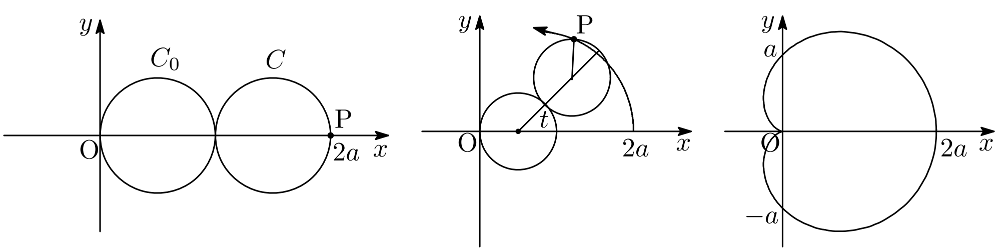


この曲線のグラフは右上図の実線であり, 実生活では電線が垂れ下ったときの曲線として見ることができる. また, 点線で示された２つの曲線は① $y=\dfrac{a}{2}e^{x/a}$ と② $y=\dfrac{a}{2}e^{-x/a}$ であり, 漸近線となっている.

問 20 下図左のように直径 a の円が２つ接してある. 円 C_0 は固定し, その回りを円 C が滑らずに外接しながら回転するとき, 点 P が描く軌跡は下図右のような曲線になる. これを**カージオイド** *cardioid*（心臓形）という. その方程式は

$$x=a(1+\cos t)\cos t,\quad y=a(1+\cos t)\sin t\qquad (0\leq t\leq 2\pi)$$

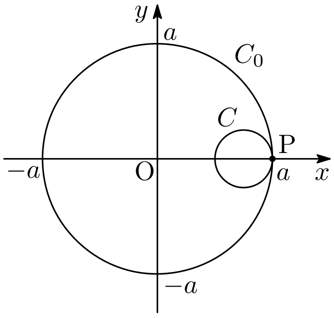
である. 曲率は $k=\dfrac{3a}{2\sqrt{2a}}(1+\cos t)^{-1/2}$ であることを導き, 頂点の座標を求めよ.

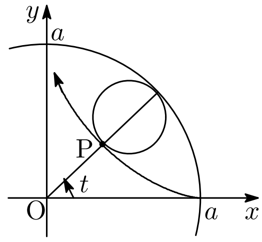


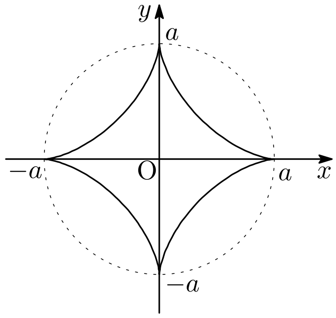
問 21 下図左のように半径 a の円 C_0 の内部に半径が $\dfrac{a}{4}$ の小円 C が内接している. 円 C_0 は固定し, 円 C が滑らずに内接しながら回転するとき, 点 P が描く軌跡は下図右のような曲線になる. これを**アストロイド** *astroid*（星形）という. その方程式は

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t\qquad (0\leq t\leq 2\pi)$$

であり, 区分的に正則な曲線である. 曲率は $k=\dfrac{a\sqrt{3a}}{\sin 2t}$ であることを導き, 頂点を求めよ.





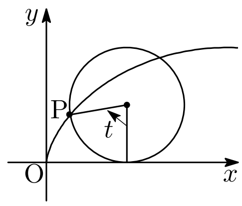


アストロイドは**アステロイド** *asteroid* と呼ばれることもあるが, それは小惑星を意味するものである．またアストロイドは座標軸上に 4 つの尖点 $(\pm a, 0), (0, \pm a)$ をもつので別名**四尖点形** *tetracuspid* とも呼ばれる．

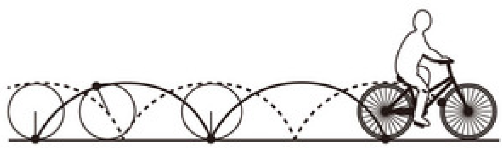
問 22 半径 a の円が直線（x 軸）上を滑ることなく転がっていくとき, 円周上の定点が描く曲線を**サイクロイド** *cycloid* という．この曲線は次の式で表される．

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

この曲線の曲率は次の式になることを導き, $0 \leq t \leq 2\pi$ とするとき, 頂点は $(\pi a, 2a)$ であることを示せ．



$$k = \frac{-1}{2\sqrt{2}\, a\sqrt{1 - \cos t}}$$



【注】車輪がころがるのを見てサイクロイドの図形を発見したのは地動説で有名なガリレオ・ガリレイ（Galileo Galilei, ユリウス暦 1564〜グレゴリオ暦 1642）であるという．その後この曲線の持つ様々な性質が研究されたが, そのうち次の 2 つが特に有名である．
(1) **等時性**. 円弧に沿って往復する振り子は, 振れる角度が十分に小さいとき, 周期の等時性は保たれるが, 振幅が大きくなれば周期は増加して等時性は成立しなくなる．それに対して, 振り子がサイクロイド曲線に沿って往復するとき, 質量や振幅に関係なく周期は一定である．この性質をホイヘンス（Christiaan Huygens, 1629〜1695）が証明し, 実際に精度の良い振り子時計を発明した．
(2) **最速降下曲線**. 空間内の 1 点から重力のみの力で他の 1 点に落下するとき, 最も速く到達する経路はサイクロイド曲線であることをヤコブ・ベルヌーイ（Jakob Bernoulli, 1654〜1705）が証明した．

問 23 一般に 2 つのベクトル $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ に対して等式 $(\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y})' = \mathbb{X}' \cdot \mathbb{Y} + \mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}'$ が成り立つことを証明せよ．

問 24 一般にベクトル $\mathbb{X}$ に対して, 常に $|\mathbb{X}| = c$（一定値）ならば $\mathbb{X} \perp \mathbb{X}'$ が成り立つことを証明せよ．

問 25 次の問に答えよ．

(1) 円の場合, 常に $\mathbb{X} \cdot \mathbb{X}' = 0$, すなわち常に $\mathbb{X} \perp \mathbb{X}'$ であることを示せ．

(2) 楕円の場合, $\mathbb{X} \perp \mathbb{X}'$ となるのは $t = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$ の 4 箇所, すなわち頂点においてであることを示せ．

(3) 放物線 $y = x^2 - 1$ について, $\mathbb{X} \perp \mathbb{X}'$ となる点を求めよ．