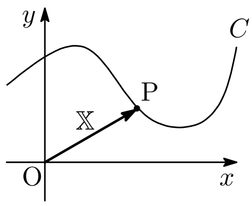
2　平面曲線

より一般的な議論をするために, 平面上の曲線をベクトルで表し, 曲率と頂点を調べる方法を考える. まず, 曲線 C を媒介変数を用いて $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ と表示する. ここで変数 t の定義域は $\mathbf{R}$ 上の区間 I とし, 関数 $x(t), y(t)$ はともに C^2 級とする. このとき曲線 C 上の点 P に対して位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を考えることができる. これを $\mathbb{X}$ と表し, 曲線の**ベクトル表示**という.

$$\mathbb{X} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (t \in I)$$



また

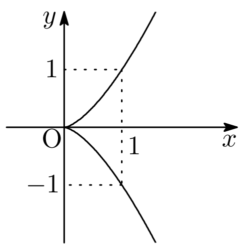
$$\mathbb{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

と表す. ここで $\mathbb{X}'$ を**接ベクトル** *tangent vector* という.

点 P の動的な変化を考え, t を時間の変数とするとき, $\mathbb{X}'$ を**速度ベクトル**, $\mathbb{X}''$ を**加速度ベクトル**ということもある.

【注】 関数 $x(t), y(t)$ はともに C^2 級であればよいが, このテキストの例や問で扱う関数はすべて C^∞ 級である. また, ベクトル $\mathbb{X}$ を曲線と呼ぶこともよくある.

速度ベクトルが $\mathbb{X}' = \mathbb{O}$ となる点を**特異点** *singular point* という. 特異点のない, すなわちすべての点で $(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$ である曲線 C を**正則**な *regular* 曲線という.



例 5 次の曲線は正則でない.　$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$

$\boxed{\text{解}}$ $\mathbb{X}' = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$ であり, $t = 0$ のとき $\mathbb{X}' = \mathbb{O}$ となるからである. //

この曲線のグラフは右図のようになり, 原点において尖っている形をしている. その点を**尖点** *cusp* という.

【注】 特異点の正確な定義は難しく, いろいろな種類の特異点があることが知られている. このテキストでは速度ベクトルが定まらないような点のこととする. すなわち特異点とは, 曲線上の点の移動で考えるとき, その動きが止まり（速度ベクトルが $\mathbb{X}' = \mathbb{O}$ となるか, あるいは不明となり）進む方向を突然変える地点のことであるとする. 上の例 5 のほかに例 4 にもそのような点が見られる. このような点においては, 曲線の曲がり方が分からなくなり曲率が求められない. 特異点における議論は難しい.

例 5 について, 点 $t = 0$ で区間を分けて $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, \infty)$ とするとき

$$\text{部分曲線 } C_1 : \mathbb{X} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad (t \in I_1) \qquad \text{部分曲線 } C_2 : \mathbb{X} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad (t \in I_2)$$

はどちらも正則な曲線である. このように一般に区間にいくつかの分点をとり, 部分区間を考え, それらすべての部分区間において部分曲線が正則であるとき**区分的に正則な** *piecewise-regular* 曲線という. 例 5 は区分的に正則な曲線である.

問 8 曲線 $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t \sin \pi t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$ は正則な曲線かどうか調べよ.

以下, 正則な曲線（または区分的に正則な曲線の場合には正則な範囲）について議論を進める．すると, 公式 1 は次のように言い換えることができる．

公式 4 曲線 $\mathbb{X}(t)$ があり, $t=t_0$ に対応する点 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$ における接触円を $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$ とするとき, 次の公式が得られる．

$$c_1=x_0-\frac{\alpha y'(t_0)}{\beta},\quad c_2=y_0+\frac{\alpha x'(t_0)}{\beta},\quad r=\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{|\beta|},\quad k=\frac{\beta}{\alpha\sqrt{\alpha}}=\beta\,\alpha^{-3/2}$$

となる．ここで簡単のために, 次のようにおいている．

$$\alpha=|\mathbb{X}'|^2=(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2 \qquad \beta=\begin{vmatrix}\mathbb{X}' & \mathbb{X}''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x'(t_0) & x''(t_0)\\ y'(t_0) & y''(t_0)\end{vmatrix}$$

証明 微分法の公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''x'-y'x''}{(x')^3}\quad \text{ただし}\quad \frac{dx}{dt}=x',\quad \frac{dy}{dt}=y',\quad \frac{d^2x}{dt^2}=x'',\quad \frac{d^2y}{dt^2}=y''$$

を適用すると得られる．//

問 9 上の証明をきちんと確認せよ．

問 10 以下の問に答えよ．

(1) 曲線を平行移動しても, または原点のまわりに回転しても曲率は変らないことを証明せよ．

(2) 曲線を x 軸に対称に移動したら曲率はどうなるか説明せよ．

(3) ある直線に関して曲線を対称に移動したら曲率はどうなるか説明せよ．

問 11 曲線が極座標の方程式 $r=f(\theta)$ で曲線が与えられているとき, $x=f(\theta)\cos\theta$, $y=f(\theta)\sin\theta$ である．この関係式を公式 4 に適用して公式 3 を証明せよ．

以下, 曲率中心と曲率半径は省略し, 曲率 $k=\dfrac{\begin{vmatrix}\mathbb{X}' & \mathbb{X}''\end{vmatrix}}{|\mathbb{X}'|^3}$ だけを用いて議論を進める．ここで分子は行列式の値であり, 絶対値でないことに注意せよ．また, 正則な曲線を扱うので分母は 0 にならないことにも注意せよ．

例 6 放物線 $y=-x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(1,-1)$ における曲率 k を求めよう．

解 これは例 1 と同じ問題であるが, ベクトルを用いて解いてみよう．

$$\mathbb{X}=\begin{pmatrix}t\\-t^2\end{pmatrix}\qquad \mathbb{X}'=\begin{pmatrix}1\\-2t\end{pmatrix}\qquad \mathbb{X}''=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

$$|\mathbb{X}'|=\sqrt{1+4t^2},\quad \begin{vmatrix}\mathbb{X}' & \mathbb{X}''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2t & -2\end{vmatrix}=-2,\quad k=\frac{-2}{\left(\sqrt{1+4t^2}\,\right)^3}$$

ここで $t=1$ を代入すると $k=-\dfrac{2}{5\sqrt{5}}$ となる．//

問 12 次の曲率を求めよ．

(1) 曲線 $y=\sqrt{x}$ をベクトル表示して, 点 $(1,1)$ における曲率

(2) 例 5 の曲線について, 点 $(1,1)$ と点 $(1,-1)$ における曲率

例 7 直線では曲率は常に $k=0$ である．

$\boxed{\text{解}}$ 点 (x_0, y_0) を通り, 方向ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とすると

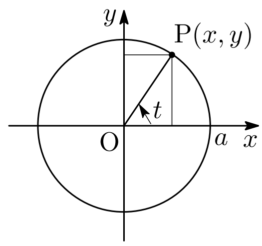
$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_0 + at \\ y_0 + bt \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R}) \qquad \mathbb{X}' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \mathbb{X}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より常に $k = 0$ となり, したがって k の値に極大も極小もないことから直線には頂点がない. //

例 8 円では曲率は常に一定である.

$\boxed{\text{解}}$ 原点を中心とし, 半径 a の円のベクトル表示は

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$



であり

$$\mathbb{X}' = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix} \quad \mathbb{X}'' = \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -a\sin t \end{pmatrix}$$

より, $\alpha = |\mathbb{X}'|^2 = a^2$, $\beta = \begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t \\ a\cos t & -a\sin t \end{vmatrix} = a^2$ となる.

よって $k = \dfrac{a^2}{a^3} = \dfrac{1}{a}$ である. 曲率は常に一定であるので, 極値をもたない. したがって円には頂点はない. //

【注】直線と円の場合, 曲率 k は常に一定であり, 極大または極小となる点はないので「頂点をもたない」と結論づけたが, 頂点の定義を「$k' = 0$ となる点」として「直線と円の場合すべての点が頂点である」と結論づけるテキストもある.

また, あとで述べる定理 2 または例 24 により, 平面上で曲率 k が一定なものは直線と円だけであることがわかる. これを踏まえると, 直線と円以外の曲線の場合には, 増減表を作らず $k' = 0$ だけで頂点を結論づけることができる.

一般に閉区間 $I = \{ a \leq t \leq b \}$ で定義された曲線 $\mathbb{X}$ について, その区間の両端において位置ベクトルが等しい $\mathbb{X}(a) = \mathbb{X}(b)$ とき, これを**閉曲線** *closed curve* という. さらに, 閉曲線で自己交差がないとき, すなわち区間 I の両端 a, b 以外の点 c, d で $\mathbb{X}(c) = \mathbb{X}(d)$ となることはないとき, **単純閉曲線**または**ジョルダン曲線** *Jordan curve* という.

例 8 で見たように円は代表的な単純閉曲線である. しかも円の場合は定義域の両端で位置ベクトルだけでなく, 速度ベクトル, 加速度ベクトルまでもが等しい. すなわち

$$\mathbb{X}'(0) = \mathbb{X}'(2\pi), \qquad \mathbb{X}''(0) = \mathbb{X}''(2\pi)$$

である. したがって曲率も定義域の両端で等しく $k(0) = k(2\pi)$ である. しかし一般には, 区間 $I = \{ a \leq t \leq b \}$ で定義された閉曲線 $\mathbb{X}$ について,

$$\mathbb{X}'(a) = \mathbb{X}'(b), \qquad \mathbb{X}''(a) = \mathbb{X}''(b)$$

までも満たされるとは限らない.

例 9 自己交差する閉曲線の一例として**パスカルのリマソン** *limaçon* について調べよう.

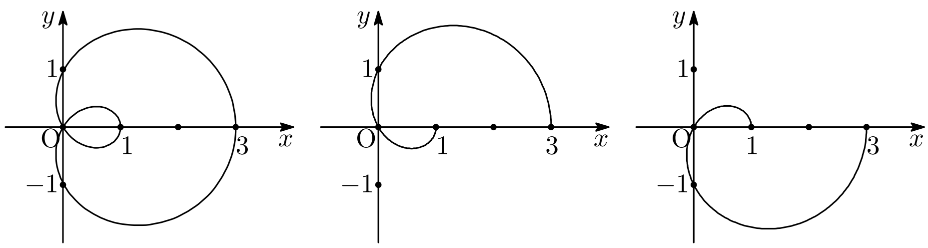
$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} (2\cos t + 1)\cos t \\ (2\cos t + 1)\sin t \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

解 $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \cos 2t + \cos t + 1 \\ \sin 2t + \sin t \end{pmatrix}$ と変形してから微分すると計算が煩雑にならない．まず $\mathbb{X}(0) = \mathbb{X}(2\pi)$ なので, 閉曲線である．さらに $\mathbb{X}'(0) = \mathbb{X}'(2\pi)\,, \mathbb{X}''(0) = \mathbb{X}''(2\pi)$ となることも分かる．次にパラメータ t の値と対応する点の座標を調べてみると

t	0	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	$3\pi/2$	2π
点	$(3,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,-1)$	$(3,0)$

となり, 区間の両端以外に $t = \dfrac{2\pi}{3}$ と $t = \dfrac{4\pi}{3}$ とで曲線が自分自身と交差していることが分かるので単純閉曲線ではない．実際にグラフを描いてみると図 (1) のようになっている．

(1) 全体 $0 \le t \le 2\pi$　　(2) $0 \le t \le \pi$ の部分　　(3) $\pi \le t \le 2\pi$ の部分

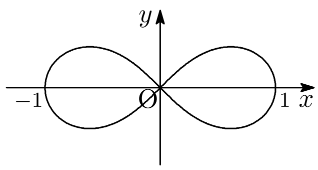


【注】頂点については問 17 で考える．なお, パスカルのリマソンは一般に

$$x = (a\cos t + b)\cos t, \quad y = (a\cos t + b)\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

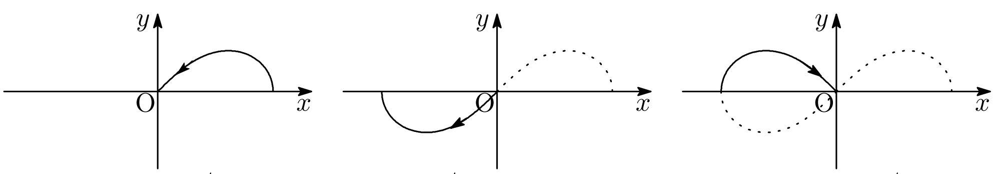
と表されるものであり, 上の例 9 は $a = 2, b = 1$ とした場合である．係数のとり方でいろいろな形が現れ, $a = b$ の場合はカージオイド（問 20）と呼ばれる．

例 10 右の図は**連珠形**またはベルヌーイの**レムニスケート** *lemniscate* とよばれる曲線で, 方程式 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ で表される．そのベクトル表示は



$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \cos t/(1 + \sin^2 t) \\ \sin t \cos t/(1 + \sin^2 t) \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

である．パラメータの範囲を区切ってみると



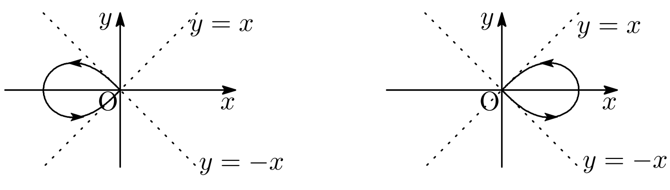
$0 \le t \le \pi/2$　　$\pi/2 \le t \le \pi$　　$\pi \le t \le 3\pi/2$

のように $t = \dfrac{\pi}{2}$ と $t = \dfrac{3\pi}{2}$ のとき原点で自己交差する閉曲線である．

【注】ベルヌーイのレムニスケートを表す方程式はいろいろあり, 極座標では

$$r = \sqrt{\cos 2\theta} \qquad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}\,,\ \ \frac{3\pi}{4} \le \theta \le \frac{5\pi}{4}$$

となる．この場合は 2 つの閉曲線が原点で重なったものである．

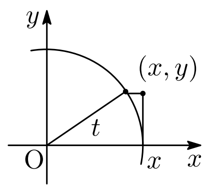


$\dfrac{3\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{5\pi}{4}$　　$-\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$

【注】レムニスケートは x-y 平面上の定点 $\mathrm{F}(a,0)$, $\mathrm{F}'(-a,0)$ からの距離の積が一定である点 $\mathrm{P}(x,y)$ の軌跡として定義される．すなわち $\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF}'=a^2$ とするとき方程式

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$$

が得られる．ここで $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の場合がこの例 10 である．さらに $0\le|x|\le 1$ であり，また $0<x$ のとき $-x<y<x$ より $0\le\left|\dfrac{y}{x}\right|<1$ だから $\dfrac{y}{x}=\sin t$ とおく（$x=0$ のとき $y=0$ とする）ことで

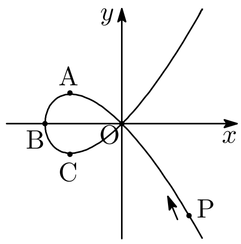


$$x=\frac{\cos t}{1+\sin^2 t},\quad y=\frac{\sin t\,\cos t}{1+\sin^2 t}\qquad 0\le t<2\pi$$

が得られる．レムニスケートの頂点については問 18 で考える．

例 11 次の曲線は右図のように原点で自己交差する．

$$\mathbb{X}=\begin{pmatrix}t^2-1\\ t^3-t\end{pmatrix}\qquad -\infty<t<\infty$$



図の中の点とパラメータ t との関係は次の通りである．t の値が $-\infty$ から増加するに伴い点 P が右下から左上方向に移動し，$t=-1$ のとき原点，そして $t=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき点 A, $t=0$ のとき点 $\mathrm{B}(-1,0)$ で x 軸を上から下へ横切り，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき点 C, $t=1$ のとき再び原点，そのあと t の値の増加に伴い右上方向に進む．